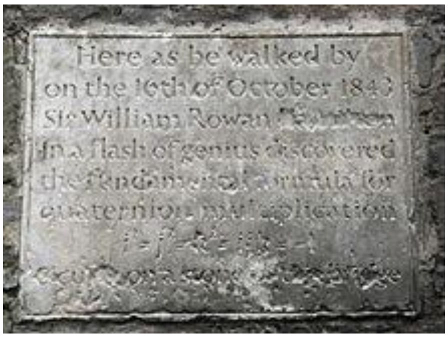
José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br


## Álgebra dos Quatérnios.

Em verbete desta série, vimos que o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) publicou, em 1853, seu célebre livro intitulado **Lectures on Quaternions**, no qual desenvolveu a Álgebra Não Comutativa de novos números que ele chamou de ***quatérnios*** (q), que seriam a "generalização" dos ***números complexos*** (a + i b, sendo a e b números reais e i = $\sqrt{-1}$) (que pertencem a um espaço 2-dimensional) e que poderiam naturalmente ser estendidos a um espaço 3-dimensional.

Conforme nos contam os ingleses, o matemático e historiador Ian Stewart (n.1945) [**Uma História da Simetria na Matemática** (Zahar, 2012)] e o físico e filósofo Roger Penrose (n.1931) [**The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe** (Alfred A. Knoff, 2005); aproveito a oportunidade para agradecer ao meu amigo, o físico brasileiro Sérgio Cavalcante Guerreiro (n.1942), pela oferta de um exemplar desse livro], a busca por essa nova estrutura algébrica tridimensional e não comutativa foi uma constante em sua vida por acreditar que ela representava a chave para quase tudo na vida.

Segundo esses autores (associado a verbetes da Wikipédia sobre a biografia de Hamilton), em uma segunda-feira, dia 16 de outubro de 1843, ele e sua esposa Helen Maria Bayly atravessavam a *Broome Bridge* [ponte essa denominada por Hamilton de "Brougham") sobre o *Royal Canal*, em Cabra, Dublin, pois Hamilton se dirigia para presidir uma Reunião da *Royal Irish Academy* (RIA) ("Real Academia Irlandesa")], quando veio à mente de Hamilton as fórmulas que envolviam os tripletos (**i**, **j**, **k**) fundamentais dos ***quatérnios*** e imediatamente gravadas por ele em um dos pilares da ponte (certamente sob o olhar atônito de sua mulher, pois elas respondiam às perguntas que seus filhos (William Edwin e Archibald Henry, respectivamente, com 8 e 9 anos) lhe faziam todas as manhãs, em 1842: - *Então Papai, você já conseguiu multiplicar seus* *esperados tripletos?*): $\mathbf{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$. Esse “lampejo” de sua mente foi comunicado a um amigo em uma carta, dizendo-lhe: - *Ali e naquele momento eu senti o circuito galvânico do pensamento se* <u>*fechar*</u> *e as faíscas que se soltaram eram as* <u>*equações fundamentais*</u> *entre* ***i, j, k****; exatamente as que eu tinha usado desde sempre* (Stewart, op. cit.). É interessante registrar que, em 1958, a RIA colocou uma placa nessa ponte com os dizeres (tradução livre): - *Aqui, quando Sir William Rowan Hamilton a atravessou no dia 16 de Outubro de 1843, em “flash” sua mente de gênio descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quatérnios -* $\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$ *- e a gravou em uma pedra desta ponte*. (en.wikipedia.org/Broom_Bridge).




Tomando as equações inscritas na ponte “Brougham” [e que indicavam que seus tripletos valem: $\mathbf{i = j = k =} \sqrt{-1}$ ($\neq$ 0)] e considerando que o produto de dois deles é anticomutativo e, portanto, as multiplicações e as divisões envolvendo-os tem que ser realizadas pela direita ou pela esquerda, Hamilton demonstrou as seguintes equações: **ij = k** (1); **jk = i** (2); **ki = j** (3); **ij = - ji** (4); **jk = - kj** (5); **ki = - ik** (6). A seguir, vejamos a demonstração das mesmas:

<u>Equação (1)</u> - Tomando a identidade **ijk = -1** e considerando que $\mathbf{k^2 = -1}$, teremos: $\mathbf{ijk = k^2}$ (**= kk**); dividindo (pela direita) esta expressão por **k**, obteremos que: **ij = k**;

Equação (2) – Tomando a identidade **ijk = -1** e considerando que $\mathbf{i}^2$ **= -1**, virá: **ijk =** $\mathbf{i}^2$ (**= ii**); dividindo (pela esquerda) esta expressão por **i**, resultará: **jk = i**;

Equação (4) - Tomando a equação (2), multiplicando (pela esquerda) por **j** e considerando que $\mathbf{j}^2$ **= -1**, resultará: $\mathbf{j}^2\mathbf{k}$ **= ji → - k = ji** que, comparada com a (1), decorrerá: **ij = - ji**;

Equação (3) – Tomando a equação (1), multiplicando (pela direita) por **i**, usando a (4) e sendo $\mathbf{i}^2$ **= -1**, teremos: **iji = ki → - jii = ki → ki = j**;

Equação (5) - Tomando a equação (1), multiplicando (pela direita) por **j**, considerando que $\mathbf{j}^2$ **= -1** e usando a (2), virá: **ijj = kj → - jk = kj → jk = - kj**;

Equação (6) - Tomando a identidade **ijk = -1**, usando a (4), seguido de $\mathbf{j}^2$ **= -1**, dividindo (pela esquerda) por **j** e considerando a (3), obter-se-á: -**jik = - 1 → - jik =** $\mathbf{j}^2$ (= jj) **→ -ik = j → - ik = ki → ki = - ik**.

Ainda é oportuno registrar que essas equações permitem demonstrar que o produto dos tripletos de Hamilton é associativo [**(ij)k = i(jk)**]. Com efeito, partindo de **(ij)k**, usando a (1) e $\mathbf{k}^2$ **= kk = -1**, resultará: **(ij)k = kk = -1**. Por sua vez, partindo de **i(jk)**, considerando a (2) e $\mathbf{i}^2$ **= ii = - 1**, obtém-se que: **i(jk) = ii = - 1**. Comparando os dois resultados, podemos escrever que: **(ij)k = i(jk)**.

De posse dessa Álgebra Não-Comutativa, Hamilton definiu (como registramos acima) um ente matemático denominado por ele de ***quatérnio***: q = t + u **i** + v **j +** w **k**, sendo t, u, v, w números reais (que obedecem a uma álgebra comutativa). Além do mais, em analogia com os números complexos para os quais o seu ***conjugado*** (*) é obtido fazendo i = – i, então Hamilton definiu o ***conjugado*** de q ($q^*$), usando essa troca para os seus tripletos, ou seja: **i = - i**, **j = - j** e **k = - k**, o que resultou na expressão: $q^*$ = t - u **i** - v **j** - w **k**. Usando suas seis equações e, também, suas definições de **i**, **j**, **k**, Hamilton obteve que: $qq^* = q^*q = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$. (Penrose, op. cit.; en.wikipedia.org/quaternions).