SEARA DA CIÊNCIA

CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo

As Equações de Maxwell.

Em 1873 o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) publicou o livro intitulado **A Treatise on Electricity & Magnetism** (Dover, 1954), no qual apresentou a formulação matemática das Leis Empíricas do Eletromagnetismo, e que ficaram conhecidas como as **Equações de Maxwell**. Vejamos como ele chegou a essa formulação.

Primeira Equação de Maxwell.

Para o caso de um meio material, em notação atual, essa equação é representada por: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{D}$ é o **vetor deslocamento** e ρ é a **densidade de carga elétrica**. Esse vetor $\vec{D}$ foi introduzido pelo próprio Maxwell ao estudar a ação da "***intensidade elétrica***" $\vec{E}$ [chamada pelo físico e químico inglês Michael Faraday (1791-1867) de "***indução elétrica***" , pelo físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854) de "***intensidade eletromotriz(tiva)***", e hoje denominada de **campo elétrico**] sobre os meios macroscópicos (dielétricos) e observar que devido ao deslocamento das cargas elétricas que compõem tais meios, aquela "***intensidade***" produz um efeito sobre os mesmos, o qual é traduzido por um vetor, denominado por Maxwell de **vetor deslocamento** $\vec{D}$, e cuja relação entre eles é dada por: $\vec{D} = \kappa \vec{E}/4\pi$ onde κ é a **capacidade indutiva específica** dos dielétricos. Hoje, esse vetor é representado por:

$$\vec{D} = e_o \vec{E} + \vec{P} = (e_o + c_e)\vec{E} \text{ e } \vec{E}$$

onde e_o é a **permissividade (permissibilidade) elétrica** do vácuo, e é a **permissibilidade elétrica** do dielétrico, c_e é a **suscetibilidade elétrica** do dielétrico, e $\vec{P}$ é o **vetor polarização**, que havia sido definido por Faraday, em 1837. Ainda nesse livro, Maxwell mostrou que a constante κ estava ligada ao **índice de refração** n do dielétrico pela relação: $\kappa = n^2$,conforme veremos mais adiante. Registre-se que a Primeira Equação de Maxwell é a representação diferencial da lei da força ($\vec{F}$) entre duas cargas elétricas, q_1 e q_2, distanciadas de uma distância r e colocadas em um meio dielétrico ε

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

A **Segunda Equação de Maxwell**, é traduzida pela expressão: $\nabla \vec{B} = 0$. Esse **vetor indução magnética** $\vec{B}$ representa a ação da **intensidade** ou **força magnética** $\vec{H}$ (hoje, conhecida como **campo magnético**) sobre os materiais magnéticos. Esses dois vetores ($\vec{B}$ e $\vec{H}$) foram estudados pelo físico e matemático escocês William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907), em 1849-1850, que os relacionou por intermédio da expressão $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}$ (hoje, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$) onde $\vec{I}(\vec{M})$ é o **vetor magnetização** e μ_0 é a **permissividade magnética** do vácuo. Essa **Segunda Equação de Maxwell** significa o fato experimental de que as linhas de força de $\vec{B}$ são fechadas, ou seja, que não existem monopólos magnéticos. Essa ***condição solenoidal*** sempre satisfeita por esse vetor, decorre da analogia com a forma das linhas de força de um solenóide, já que este se comporta como uma barra magnética imantada quando pelo mesmo circula uma corrente elétrica, segundo as experiências realizadas pelo físico francês André Marie Ampère (1775-1836), em 1820. Observe-se que essa condição solenoidal levou Maxwell a introduzir o **potencial vetor** $\vec{A}$ Vejamos como. Em 1871, ele havia demonstrado que a ``convergência'' (hoje, **divergência** Ñ.) da ``rotação'' (hoje, **rotacional** Ñ´) de uma função vetorial era nula. Assim, ao demonstrar que a ``convergência" de $\vec{B}$ era nula, esse resultado levou-o a concluir que esse vetor poderia ser escrito como a ``rotação" de um certo vetor $\vec{A}$ $\vec{B}$ $= Ñ ´ \vec{A}$

A **Terceira Equação de Maxwell**, traduzida pela expressão (ainda na notação atual): $\nabla \times \vec{E} + \partial \vec{B}/\partial t = 0$ representa a **lei da indução magnética** obtida, independentemente, por Faraday e pelo físico norte-americano Joseph Henry (1797-1878), em 1831-1832.

A **Quarta Equação de Maxwell**, é traduzida pela expressão (ainda na notação atual): $\nabla \times \vec{H} - \partial \vec{D}/\partial t = \vec{J}$ onde $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ representa a **densidade de corrente de condução** e que satisfaz a **equação da continuidade** ($\nabla \cdot \vec{J} + \partial \rho/\partial t = 0$) sendo σ e ρ a **condutividade** e a **densidade** elétricas), e $\partial \vec{D}/\partial t$ é a **densidade de corrente de deslocamento**. Esta densidade foi uma das grandes contribuições dadas por Maxwell para o eletromagnetismo. Ele a obteve por intermédio do seguinte raciocínio. Examinando os trabalhos do físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854), de 1827, Maxwell observou que o mesmo falara da intensidade (I dessa corrente através de um circuito. Para isso, definiu o **vetor densidade de corrente** $\vec{K}$ (hoje, $\vec{J}$) dado por $\vec{K} = C \vec{E}$ onde σ **condutividade** do material e $\vec{E}$, a conhecida ***intensidade eletromotriz Ohmiana***", e deu a essa equação o nome de **equação da continuidade** ou **lei de Ohm**. Por outro lado, ao analisar as experiências realizadas por Ampère, em 1827, Maxwell demonstrou (na notação atual):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 4\pi \sum_i I_i \quad ,$$

onde C representa uma curva que envolve várias correntes elétricas (I_i). Essa expressão ficou conhecida como **lei circuital de Ampère**. Assim, de posse dessas duas leis (Ohm e Ampère), Maxwell demonstrou que (na notação atual): $\nabla \cdot \vec{K} = 0$ e, em vista desse resultado, questionou então que tipo de corrente corresponde a essa densidade $\vec{K}$. Ora, em seus estudos sobre a ação de $\vec{E}$ nos meios dielétricos, observou que há um "***deslocamento***" das cargas elétricas (conforme Faraday havia também registrado), o que o levou, nessa ocasião, a propor a existência do **vetor deslocamento** $\vec{D}$ ***intensidade eletromotriz***" provocava um deslocamento de cargas elétricas nos condutores, denominado por Maxwell de **corrente de condução**. Essa análise foi o bastante para que Maxwell concluísse que na **lei circuital de Ampère** (quando houvesse envolvimento de materiais dielétricos), a densidade de corrente considerada na mesma deveria ser composta de dois componentes: a **densidade de corrente de condução** ($\vec{K}$) oriunda da lei de Ohm, e uma outra parcela, que ele denominou de **densidade de corrente de deslocamento** ($\partial \vec{D}/\partial t$) para que se compatibilizasse com a equação da continuidade que havia demonstrado. Assim, agora, essa equação tomaria a seguinte forma (na notação vetorial atual): $\nabla \cdot (\vec{K} + \vec{D}) = 0$. (Observe-se que se usarmos a **Primeira Equação de Maxwell**, essa expressão transforma-se na equação da continuidade vista acima, uma vez que $\vec{K} = \vec{J}$). Desse modo, a **Quarta Equação de Maxwell** é a representação diferencial da hoje conhecida **lei circuital de Ampère-Maxwell**.

Ainda nesse livro, Maxwell prosseguiu seu trabalho no sentido de formalizar matematicamente o eletromagnetismo. Assim, estudou as soluções de ondas planas para as suas equações, uma vez que, usando tais equações, demonstrara que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ **Equação de Onda d´Alembertiana** (na notação atual):

$$\Delta \vec{E}\,(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{B})}{\partial t^2} = 0$$

Nesse estudo, observou que os distúrbios, quer elétricos, quer magnéticos, estão confinados em um mesmo plano, porém em direções perpendiculares e, perpendiculares, também, à direção de propagação desse plano de onda, significando dizer que tal onda era **transversal**, exatamente como os distúrbios luminosos. Desse modo, confirmou mais uma vez a conjectura que havia apresentado em 1861-1862: *A luz é uma onda eletromagnética* que se propaga no **meio luminífero**, meio esse introduzido pelo físico, matemático e filósofo francês René du Perron Descartes (1596-1650), em 1637.

Também no **Treatise**, Maxwell relatou o resultado de suas experiências, nas quais mostrou que se a lei de atração ou repulsão entre cargas elétricas fosse do tipo $r^{-(2 \pm q)}$ então $q = 1/21.600$ bem como deu uma explicação matemática para a "***magnética induzida***" observada pelo físico francês Dominique François Jean Arago (1786-1853), em 1826. Ainda nesse livro, Maxwell apresentou novos resultados para a sua Teoria Eletromagnética da Luz, que havia começado a desenvolver desde 1865, ocasião em que demonstrou que a velocidade (V) de propagação de um distúrbio eletromagnético através de um meio transparente uniforme qualquer, era dada por: $V = (\mu \kappa)^{-1/2}$ onde mu é a **permissividade magnética** e κ é a **capacidade indutiva específica**. Ora, de um modo geral, os meios transparentes têm $\mu \approx 1$ então $V = \kappa^{-1/2}$ Por outro lado, segundo a Teoria Ondulatória da Luz [proposta pelo físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695), em 1690) e completada pelo físico francês Augustin Jean Fresnel (1788-1827), em, 1819] , $V = c/n$ c é a velocidade da luz no vácuo e n é o índice de refração dos materiais transparentes. Assim, para o vácuo, teremos: $c = \kappa_0^{-1/2}$ e, portanto, a **constante dielétrica** $\kappa' = \kappa/\kappa_0$ será dada por: $\kappa' = \kappa/\kappa_0 = V^2/c^2 = n^2$. De posse dessa expressão, Maxwell observou que para comprovar a sua teoria sobre a natureza eletromagnética da luz, era necessário apenas comparar os resultados experimentais de κ' n Gladstone (1827-1902), em 1858, Maxwell observou que havia uma discrepância entre os valores teórico e experimental, pois: $n_{exp} = 1.422$ e $n_{teo} = 1,405$. Estando essa diferença fora dos erros experimentais, Maxwell ponderou que as teorias sobre a estrutura dos corpos transparentes deveriam ser melhoradas para que suas propriedades ópticas pudessem ser deduzidas por intermédio de suas propriedades eletromagnéticas. Registre-se que essa melhoria foi conseguida pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1892, quando apresentou sua Teoria da Dispersão da Luz.

ANTERIOR SEGUINTE