José Maria Bassalo

O Potencial Vetor de Maxwell e sua Interpretação.

As primeiras idéias sobre o potencial vetor $\vec{A}$ foram apresentadas pelo físico alemão Franz Ernst Neumann (1798-1895), em 1845 (*Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *aus dem Jahre*, p. 1) e 1847 (*Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, *aus dem Jahre*, p. 1), quando analisou o processo de indução magnética [descoberta, em trabalhos independentes, pelo físico e químico inglês Michael Faraday (1791-1867), em 1831, e pelo físico norte-americano Joseph Henry (1797-1878), em 1832] em um circuito devido ao movimento relativo de magnetos ou circuitos próximos. Muito embora Neumann não haja definido o potencial vetor diretamente da expressão que calculou para representar a força entre dois circuitos (C, C'), infere-se que, na linguagem atual, o potencial vetor de Neumann $\vec{A}_N$ é representado por: $\vec{A}_N = I'/c \oint_{C'} \vec{n}'/r\, ds'$, onde I' representa a corrente elétrica que circula em um circuito C', r indica a distância de um elemento de circuito ds' de C' a um elemento ds do circuito C, $\vec{n}'$ é o versor que indica o sentido de circulação de I', e c é a velocidade da luz no vácuo [John David Jackson e Lev Borisovich Okun, *Lawrence Berkeley National Laboratory.* LBNL – 47066 (2000)].

Independentemente de Neumann e quase ao mesmo tempo, o físico alemão Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) iniciou, em 1846, suas famosas publicações **Elektrodynamische Maasbestimmungen** (``Medidas Eletrodinâmicas''), concluídas em 1878, e compostas de sete longos trabalhos. Na primeira dessas publicações, Weber formulou a sua famosa ***lei da força*** entre cargas elétricas em movimento, dada pela expressão: $F = (e_1 e_2)/r^2\left[1 - (1/c^2)(dr/dt)^2 + (2r/c^2)\left(d^2r/dt^2\right)\right]$, onde dr/dt e d^2r/dt^2 representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração radiais relativas entre as cargas e_1 e e_2, e c é uma constante que expressa a relação entre as unidades eletrostática e eletrodinâmica da carga elétrica. Registre-se que, mais tarde, o físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) mostraria que essa constante c representaria $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da luz no vácuo. Na expressão indicada acima, o termo dominante e_1e_2/r^2 representa a **força de Coulomb** [obtida, em 1785, pelo físico francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806)], e os demais termos modificam essa força à medida que as cargas elétricas apresentam um movimento relativo.

Desse modo, usando a expressão que havia deduzido e indicada acima, Weber passou a estudar a força entre dois circuitos (C, C'). No entanto, ele adotou a hipótese de que a ``corrente elétrica'' (I) em um circuito era devido a igual número de cargas de mesmo sinal que se movem com a mesma velocidade, porém em sentidos contrários. Essa hipótese, contudo, divergia da hipótese em vigor que considerava aquela corrente como devida ao fluxo de dois ***fluidos elétricos*** (vide verbete nesta série). Como Neumann, Weber também não definiu o potencial vetor diretamente. No entanto, da análise que fez, em 1848 (*Annalen der Physik und Chemie* **73**, p. 193), sobre dois circuitos sem movimento relativo, pode-se escrever que, na linguagem atual, o **potencial vetor de Weber** $\vec{A}_W$ é traduzido por: $\vec{A}_W = (I'/c) \oint_{C'} (\vec{r}\vec{r}\times\vec{n}'/r)\, ds'$ (Jackson e Okun, op. cit.), onde as letras indicadas têm o mesmo significado da expressão obtida por Neumann. Registre-se que um estudo moderno da Eletrodinâmica de Weber foi apresentado pelo físico brasileiro André Koch Torres (n.1962) no livro intitulado **Weber's Electrodynamics** (Kluwer, Holanda, 1994) e traduzido pela UNICAMP, em 1995.

Conforme salientamos acima, o potencial vetor $\vec{A}$ não foi explicitamente apresentado nem por Neumann nem por Weber, e sim, somente pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1857 (*Annalen der Physik und Chemie* **102**, p. 529), ao estudar a propagação de um distúrbio elétrico ao longo de um condutor perfeito. Desse modo, ele foi o primeiro a escrever explicitamente a expressão de $\vec{A}_W$ em forma de componentes. Além do mais, ele também afirmou que as componentes da **densidade de corrente induzida** ($\vec{J}$) poderiam ser obtidas como a **condutividade** (σ) multiplicada pela soma negativa do gradiente do **potencial escalar elétrico** (Φ) e a derivada temporal do potencial vetor ($\vec{A}$). Na linguagem moderna, essa afirmação é representada pela seguinte expressão: $\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma[-\nabla\Phi - (1/c)(\partial\vec{A}/\partial t)]$, expressão essa que traduz a famosa **lei de Ohm**, em razão das experiências realizadas pelo físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854), de janeiro a dezembro de 1825. Registre-se que Kirchhoff atribuiu o segundo termo dessa expressão a Weber (Jackson e Okun, op. cit.).

Em seu trabalho, Kirchhoff generalizou a forma do potencial vetor obtida por Weber ($\vec{A}_W$), bem como encontrou uma relação entre os potenciais $\vec{A}$ e Φ. Em linguagem atual, esses resultados obtidos por Kirchhoff têm os seguintes aspectos (Jackson e Okun, op. cit.):

$$\vec{A}_{WK} = (1/c) \int_V (1/r)\, \vec{r}\vec{r} \times \vec{J} dV, \qquad \nabla \cdot \vec{A}_{WK} = (1/c)\,(\partial\Phi/\partial t).$$

A idéia de potencial vetor voltou a ser objeto de estudo nas pesquisas realizadas por Maxwell sobre as ***linhas de força de Faraday*** [conceito apresentado pelo físico e químico inglês Michael Faraday (1791-1867), em 1845] e os processos eletromagnéticos gerais. Desse modo, entre 1861 e 1862, Maxwell analisou a existência de tensões e vibrações no éter (meio que ocupa o espaço vazio entre os corpos do Universo), associadas àquelas ``linhas de força'' e relativas ao campo magnético. Ao estudar as leis da Dinâmica dessas tensões e vibrações, intuiu que: *A luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio ambiente que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos*.

Mais tarde, em 1865 (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **155**, p. 459; *Philosophical Magazine* **29**, p. 152), Maxwell publicou o resultado de suas pesquisas relacionadas com o caráter eletromagnético da luz. Nessas pesquisas, demonstrou que um distúrbio eletromagnético em um meio uniforme se propagava como se fosse uma onda caracterizada pela seguinte equação [na linguagem dos quatérnios hamiltonianos (vide verbete nesta série) e atualizada]:

$$\mu\,(4\pi C + K\, d/dt)(d\vec{A}_M/dt + \nabla\psi) + \nabla^2 \vec{A}_M + \nabla J = 0,$$

onde μ é a **permeabilidade magnética**, K é a **capacidade indutiva específica**, C é a **condutividade específica**, Ψ é o **potencial elétrico**, e $J = dF/dx + dG/dy + dH/dz$, com F, G, H representando as componentes do **potencial vetor** $\vec{A}_M$, introduzido pelo próprio Maxwell que, por sinal, denotava-o por $\mathbf{A}$, conforme se pode ver em seu famoso livro intitulado **A Treatise on Electricity & Magnetism** (Dover, 1954).

Obtida a equação acima, Maxwell demonstrou que quando o meio é não condutor ($C=0$), a função J é no máximo uma função linear no tempo (t) podendo, também, ser constante ou nula. Desse modo, considerando que a função Ψ é independente de t, Maxwell obteve a equação: $\nabla^2\vec{A}_M + \mu K\, d^2\vec{A}_M/dt^2 = 0$. Desse modo, examinando essa equação, Maxwell percebeu que ela já havia sido observada pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1818, ao estudar o movimento dos sólidos elásticos incompressíveis, e, também, havia sido aplicada à Teoria da Difração pelo matemático e físico inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1849. Portanto, como a equação vista acima correspondia a uma equação de ondas, Maxwell percebeu que $\mu K = v^{-2}$, onde v representava a velocidade de propagação dos distúrbios eletromagnéticos no meio não-condutor considerado. Em seguida, usando os valores de μ e K que haviam sido determinados experimentalmente por Weber e pelo físico alemão Rudolph Hermann Arndt Kohlrausch (1809-1858), em 1857, Maxwell obteve o seguinte valor para aquela velocidade: $v = 310.740$ km/s. Em vista desse resultado, e considerando que a velocidade da luz no vácuo era da ordem de 298.360 km/s, valor esse obtido pelo físico francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), em 1850, Maxwell confirmou, por fim, a conjectura que havia feito em 1861-1862: *A luz é uma onda eletromagnética*.

Antes de continuarmos com o trabalho de Maxwell sobre os fenômenos eletromagnéticos-ópticos (principalmente com o conceito do potencial vetor, objeto principal deste artigo) que culminou com a publicação de seu **Treatise**, em 1873, vejamos a contribuição de outros cientistas sobre esse mesmo tema.

Em 1863 (*Annalen der Physik und Chemie* **18**, p. 111; *Philosophical Magazine* **26**, p. 81; 205) e, em 1867 (*Annalen der Physik und Chemie* **131**, p. 243; *Philosophical Magazine* **34**, p. 287), o físico dinamarquês Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891) desenvolveu a Teoria Eletromagnética da Luz (TEL) usando os conhecimentos básicos de sua época, como a Teoria Ondulatória da Luz formulada, em 1816 (*Annales de Chimie et de Physique* **1**, p. 239), pelo físico francês Augustin Jean Fresnel (1788-1827). Em sua TEL, Lorenz generalizou os conceitos de potencial elétrico $\Phi(\vec{r},t)$ e potencial vetor $\vec{A}_L(\vec{r},t) \equiv \vec{A}_{Lorenz}(\vec{r},t)$, apresentando-os na forma (em notação atual):

$$\Phi(\vec{r},t) = \int (1/r)\, \rho(\vec{r}', t - r/c)\, d^3\vec{r}', \qquad \vec{A}_L(\vec{r},t) = (1/c) \int (1/r)\, \vec{J}(\vec{r}', t - r/c)\, d^3\vec{r}'.$$

No artigo de 1867, depois de mostrar que todos os fatos conhecidos sobre eletricidade e magnetismo (nesse tempo todos quase-estáticos) são consistentes com os potenciais retardados definidos acima, Lorenz passou a deduzir as equações dos campos respectivos (elétrico e magnético), mais tarde obtidas por Maxwell – as famosas **Equações de Maxwell** (vide verbete nesta série) – e que eram equivalentes às que ele, Lorenz, havia obtido no artigo de 1863. Em seguida, ele discutiu a propagação da luz em metais, em dielétricos, no espaço livre, e na ausência de cargas livres no interior de condutores. Na dedução daquelas equações, Lorenz estabeleceu que os potenciais retardados são soluções de uma equação de onda, que satisfazem a condição: $d\bar{\Omega}/dt = -2\,(d\alpha/dx + d\beta/dy + d\gamma/dz)$, onde $\bar{\Omega}$ representa o potencial escalar elétrico (Φ) e α, β, γ são os componentes do potencial vetor ($\vec{A}_L$). Em linguagem atual, a expressão acima é escrita na forma: $\nabla \cdot \vec{A}_L = -(1/c)\,(\partial\Phi/\partial t)$. Aliás, é oportuno registrar que essa expressão só foi demonstrada pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1904 (*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* **V14**, p. 145), como decorrência de seu trabalho sobre a Teoria Eletromagnética Maxwelliana. Em vista disso, tal expressão passou a ser conhecida, erroneamente, como o **'gauge' de Lorentz**. É oportuno registrar que esse erro foi primeiramente apontado por A. O'Rahilly no livro intitulado **Electromagnetics** (Longmans, Green and Cork University Press, 1938) (Jackson e Okun, op. cit.).

A Teoria Eletromagnética também foi objeto de estudo por parte do fisiologista e físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) em uma série de artigos escritos entre 1870 e 1874 [*Journal für die reine und angewandte Mathematik* **72**, p. 57 (1870); **75**, p. 35 (1873); **78**, 273 (1874)]. Nesses artigos, ele analisou os potenciais vetor de Neumann ($\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$) e de Weber ($\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}}$), e propôs a seguinte expressão generalizada (notação atual): $\vec{\mathbf{A}}^{*}_{\mathbf{H}} = (1/2)\,(1+\alpha)\,\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + (1/2)\,(1-\alpha)\,\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}} + (1/2)\,(1-\alpha)\,\nabla\psi$ (com $\alpha = \pm 1$ reproduzindo, respectivamente, $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{N}}$ e $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{W}}$), e $\psi = -(1/c)\int \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}',t)\, d^3\vec{\mathbf{r}}'$. Nesses trabalhos, Helmholtz demonstrou ainda que: $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}^{*}_{\mathbf{H}} = -(\alpha/c)\,[\partial\Phi(\vec{\mathbf{r}},t)/\partial t]$, em que $\Phi(\vec{r},t)$ representa o potencial eletrostático instantâneo. A expressão acima nos mostra que quando $\alpha = -1$ obtém-se o mesmo resultado de Kirchhoff [vide expressão para $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{WK}}$] e, formalmente, o mesmo resultado de Lorenz [vide expressão para $\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{L}}$]. Contudo, enquanto Kirchhoff trata com potenciais quase-estáticos, Lorenz trabalha com potenciais retardados, pois temos $\rho(\vec{\mathbf{r}}',t-r/c)$ e $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}',t-r/c)$.

Agora, voltemos ao trabalho de Maxwell. Em seu **Treatise**, no qual ele apresentou suas célebres equações (vide verbete nesta série), a segunda delas representa o fato experimental de que as linhas de força do vetor indução magnética $\vec{\mathbf{B}}$ são fechadas, isto é: $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ (na linguagem atual). Foi essa condição solenoidal que levou Maxwell a introduzir o **potencial vetor $\mathbf{A}$**, conforme registramos acima. Vejamos como. Em 1871, ele havia demonstrado que a ``convergência'' (hoje, **divergência** - $\nabla \cdot$) da ``rotação'' (hoje, **rotacional** - $\nabla\times$) de uma função vetorial ($\vec{\mathbf{F}}$) era nula, ou seja: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) = 0$. Assim, aplicando esse resultado a sua segunda equação, concluiu que (ainda, em notação atual): $\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$. Ainda em 1871, Maxwell demonstrou que a ``rotação'' do gradiente de uma função escalar (χ) era nula, ou seja: $\nabla \times (\nabla \chi) = 0$. Juntando os dois resultados, Maxwell apresentou em seu **Treatise**, a expressão conhecida hoje como **transformação de `gauge'**, qual seja: $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}' - \nabla\chi$, com a seguinte observação: *A quantidade χ desaparece quando se usa a equação* [$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$] *e ela não se relaciona com qualquer fenômeno físico* (Jackson e Okun, op. cit.).

Desse modo, Maxwell introduziu o **potencial vetor** apenas como um artifício matemático, sem apresentar uma expressão analítica para ele. Hoje, em qualquer livro texto que trata do assunto, mostra-se como se encontra essa expressão analítica a partir da definição de $\vec{\mathbf{B}}$. Com efeito:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = (1/c)\int \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')/|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^{3}\, d^3\vec{\mathbf{r}}' = \nabla \times \left((1/c)\int \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}')/|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^{3}\, d^3\vec{\mathbf{r}}'\right) \equiv \nabla \times \vec{\mathbf{A}}.$$

É oportuno esclarecer que, diferentemente do potencial vetor ($\vec{\mathbf{A}}$), o potencial elétrico (Φ) apresenta uma interpretação física, qual seja: $\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{A}^{B} \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}') \cdot d\vec{\mathbf{l}}'$ [José Maria Filardo Bassalo, **Eletrodinâmica Clássica** (Livraria da Física, 2007); John David Jackson, **Classical Electrodynamics** (John Wiley, 1998).

Conforme vimos, Lorentz também trabalhou com a Teoria Eletromagnética (de Helmholtz e de Maxwell). Com efeito, em 1875, ele defendeu sua tese de doutoramento, intitulada **Sobre a teoria da reflexão e da refração da luz**, na Universidade de Leiden, obtendo o grau *summa cum laude*. A partir de 1892, Lorentz começou a desenvolver sua famosa **Teoria dos Elétrons** (vide verbete nesta série), com um trabalho no qual mostrou que a solução da equação de onda não-homogênea (em notação atual): $(1/c^2)\,\partial^2 F/\partial t^2 - \nabla^2 F = s(\vec{\mathbf{r}},t)$, depende da posição da fonte $s(\vec{\mathbf{r}},t)$ em um instante anterior $t' = t - r/c$, ou seja: $F(\vec{\mathbf{r}},t) = (1/4\pi)\int_V (1/r)\, s(\vec{\mathbf{r}}', t' = t - r/c)\, d^3\vec{\mathbf{r}}'$. Aliás, esse resultado já havia sido demonstrado pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em 1858, e por Lorenz, em 1861.

Usando o resultado acima, Lorentz encontrou as soluções retardadas dos potenciais escalar $\Phi(\vec{\mathbf{r}},t)$ e vetor $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)$, obtidas por Lorenz, em 1867, conforme registramos anteriormente, porém, tomando como a fonte $s(\vec{\mathbf{r}},t)$, respectivamente, $\rho(\vec{\mathbf{r}},t)$ e $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},t)$, conforme ele publicou no livro intitulado **Versuch einer Theorie der Electrischen und Optischen Erscheinungen in begwegten Körpen** (E. J. Brill, Leiden, 1895). Ainda nesse livro, Lorentz discutiu a arbitrariedade desses potenciais, afirmando que eles podem corresponder aos mesmos campos elétricos $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{E}}_0$ e magnéticos $\vec{\mathbf{B}}$ e $\vec{\mathbf{B}}_0$, desde que satisfaçam as relações: $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_0 - \nabla\chi$ e $\Phi = \Phi_0 + (1/c)\,(\partial\chi/\partial t)$, com χ obedecendo a expressão: $\nabla^2\chi - (1/c^2)\,(\partial^2\chi/\partial t^2) = 0$. Note-se que a arbitrariedade referida acima decorre das expressões que definem os campos elétrico [$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\,\Phi - (1/c)\,\partial\vec{\mathbf{A}}/\partial t$] e magnético ($\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$), o **'gauge' de Lorenz-Lorentz** e a irrotacionalidade do gradiente, isto é: $\nabla \times \nabla\chi = 0$ [Bassalo (2007), op. cit.; Jackson (1998), op, cit.].

Apesar de todo o uso formal do potencial vetor $\vec{A}$, conforme visto acima, não existia uma interpretação física para ele. Foi o físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933), em 1931, o primeiro a vislumbrar a importância física de $\vec{A}$ fazendo previsões sobre **monopolos magnéticos** (vide verbete nesta série), usando a Mecânica Quântica. Somente em 1959 (*Physical Review* **115**, p. 485), os físicos, o israelense Yaki Aharonov e o norte-americano David Joseph Bohm (1917-1992) encontraram uma interpretação física de $\vec{\mathbf{A}}$ por intermédio de um fenômeno quântico de interferência, conhecido desde então como **efeito Aharonov-Bohm** (vide verbete nesta série). Registre-se que, antes, em 1949 (*Proceedings of the Physical Society of London* **62**, p. 8), W. Eherenberg e R. S. Siday já haviam discutido os efeitos dos potenciais eletromagnéticos na Mecânica Quântica.
