SEARA DA CIÊNCIA

CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo

Invariantes de Ermakov-Lewis e Pacotes de Onda.

A descoberta de invariantes exatos (constantes de movimento exatas ou integrais primeiras exatas) é de importância fundamental para um dado sistema físico (clássico ou quântico). Um número suficiente de invariantes exatos implica em um comportamento previsível da dinâmica do sistema físico em questão, sem ocorrência de caos. Os detalhes da determinação desses invariantes, bem como diversas aplicações dos mesmos, podem ser vistos, por exemplo, nos seguintes textos: Antônio Boulhosa Nassar, Ermakov and non-Ermakov Systems in Quantum Dissipative Models [*Journal of Mathematical Physics* 27, p. 755 (1986)]; Fernando Haas, Sistemas de Ermakov Generalizados, Simetrias e Invariantes Exatos [*Tese de Doutoramento* IFUFRS, (1998)]; Pedro Basílio Espinoza Padilla, Ermakov-Lewis Dynamic Invariants with Some Applications [*Master Thesis*, IF/Universidad de Guanajuato (2000)]; e Rachel M. Hawkins e James E. Lidsey, Ermakov-Pinney Equation in Scalar Field Cosmologies [*Physical Review* D66, p. 023523 (2002)]. Vejamos como encontrar os invariantes referidos acima.
Em 1880 [*Universita Izvestia Kiev* 20 (9), p.1], o matemático ucraniano Vasilii Petrovich Ermakov (1845-1922) foi o primeiro a demonstrar que algumas equações diferenciais não lineares de segunda ordem são relacionadas, de maneira simples e definida, com equações diferenciais lineares de segunda ordem. Essa demonstração ficou conhecida como o Método de Ermakov (ME), assim enunciado (Haas, op. cit.):

Dadas a equação (linear) $d^2y/dx^2 + M(x)\,y = 0$ *e a equação (não linear)* $d^2z/dx^2 + M(x)\,z = \lambda/z^3$, *onde* λ *é constante, a eliminação de* $M(x)$ *entre elas leva diretamente à integral primeira:*
$I = (1/2)(z\,dy/dx - y\,dz/dx)^2 + (\lambda/2)\,(y/z)^2$.

Mais tarde, em 1930 (*Physical Review* 35, p. 863), W. E. Milne desenvolveu um método análogo ao ME para resolver a equação de Schrödinger unidimensional levando em conta a estrutura oscilatória básica da função de onda de Schrödinger [$\psi(x)$]. Desse modo, encontrou que a equação diferencial não linear satisfeita pela amplitude de $\psi(x)$ coincide com a equação obtida por Ermakov. Vinte anos depois, em 1950 (*Proceedings of the American Mathematical Society* 1, p. 681), E. Pinney apresentou a solução (sem demonstração, por ser, segundo ele, trival), da equação de Ermakov-Milne, depois conhecida como equação de Milne-Pinney, em termos das soluções linearmente independentes da equação linear associada a essa equação. Vejamos essa solução.
Dada a equação: $y''(x) + p(x)\,y(x) = \lambda/y^3(x)$, onde λ é constante, sua solução geral para a qual $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, é dada por (Hawkins e Lidsey, op. cit.):

$$y_P(x) = \left[A\,y_1^2(x) + B\,y_2^2(x) + 2\,C\,y_1(x)\,y_2(x)\right]^{1/2},$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação linear homogênea $y''(x) + p(x)\,y(x) = 0$, para a qual $y_1(x_0) = y_0$, $y'_1(x_0) = y'_0$; $y_2(x_0) = 0$, $y'_2(x_0) \neq y'_0$, as constantes A, B e C satisfazem a relação: $A\,B - C^2 = \lambda/W^2$, e o Wronskiano $W = y_1\,y'_2 - y'_1\,y_2 = \text{constante} \neq 0$, devido ao teorema de Abel. É oportuno esclarecer que, para p(x) lentamente variável, a determinação de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ pode ser realizada por intermédio do método WKB. [Jon Mathews and R. L. Walker, Mathematical Methods of Physics (W. A. Benjamin, Inc., 1965).]

O sistema Ermakov-Milne-Pinney foi reencontrado, em 1967 (*Physical Review Letters* 18, p. 510), por H. R. Lewis, Jr. ao estudar o movimento de um sistema caracterizado pela Hamiltoniana $H_L = (1/2\,\varepsilon)[p^2 + \Omega^2(t)\,q^2]$, onde q e p representam, respectivamente, a posição e o momento canonicamente conjugados, $\Omega^2(t)$ é uma função arbitrária do tempo t, que representa a freqüência de um oscilador harmônico dependente do tempo (OHDT), e ε é um parâmetro real e positivo. Essencialmente, Lewis demonstrou que existe uma quantidade (I) para esse OHDT, dada por: $I = (1/2)\,[(\dot{q}\alpha - \dot{\alpha}q)^2 + \lambda\,(q/\alpha)^2]$, onde q e α satisfazem ao par de equações, $\ddot{q} + \Omega^2(t)\,q = 0$ e $\ddot{\alpha} + \Omega^2(t)\,\alpha = \lambda/\alpha^3$ - o par de equações de Ermakov-Milne -, que é invariante, ou seja: $dI/dt = 0$.

Registre-se que Lewis demonstrou essa invariância, tanto para o caso clássico, quanto para o caso quântico. Desse modo, o problema de encontrar os invariantes de sistemas físicos dependentes do tempo passou então a ser conhecido como o problema do invariante de Ermakov-Lewis (IE-L).

Essa técnica de determinação do IE-L foi usada pelos físicos brasileiros José Maria Filardo Bassalo (n.1935), Paulo de Tarso Santos Alencar (n.1940), Mauro Sérgio Dorsa Cattani (n.1942) e Antônio Boulhosa Nassar (n.1953), em 2003 [**Tópicos da Mecânica Quântica de Broglie-Bohm** (EDUFPA)], e por Daniel Gemaque da Silva (n.1977), em 2007 (*TCC*, DF/UFPA), usando a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm (MQBB), cujos principais conceitos são a **velocidade quântica** e o **potencial quântico de Bohm** (ver verbete nesta série), para os diversos sistemas físicos sujeitos ao potencial do OHDT, representados por **equações de Schrödinger**, lineares e não lineares. Nesses textos, verificamos que alguns desses sistemas apresentam IE-L, e outros não.

Ainda no livro referido acima foi usada a técnica do IE-L para estudar a evolução do pacote de onda quântico associado a um sistema físico. Assim, para o caso da partícula livre (PL), essa técnica permite demonstrar que:

$$a^2_{PLBB}(t) = a_0^2\left[1 + t\,(2\zeta/\tau) + t^2(1+\zeta^2)/\tau^2\right],$$

com $\tau = 2\,m\,a_0^2/\hbar^2$, $b_0/a_0 = \zeta/\tau$, $a_{PLBB}(0) = a_0$ e $\dot{a}_{PLBB}(0) = b_0$, onde $a_{PLBB}(t)$ representa a evolução temporal do pacote de onda Debroglieano associado à PL e de largura inicial a_0, calculada com a MQBB. Registre-se que a evolução temporal do **pacote de onda Schrödingeriano**, calculada pela Mecânica Quântica Ondulatória de Schrödinger (MQOS) e encontrada em qualquer texto didático sobre essa Mecânica], é dada pela expressão: $a^2_{PLS}(t) = a_0^2\left(1 + t^2/\tau^2\right)$, que nada mais é do que um caso particular da expressão obtida pela MQBB, quando se faz $\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad b_0 = 0$. Note-se que, comparando-se os dois resultados, observa-se que o pacote de onda da PL, calculado pela MQOS, espraia mais lentamente do que quando calculado pela MQBB. Essa diferença talvez indique uma maneira experimental para comprovar a existência do potencial quântico de Bohm.

Para o caso de uma partícula sob o potencial do OHDT, a evolução temporal de $a_{OHDTBB}(t)$, calculada pela MQBB, é dada por (vide Bassalo, Alencar, Cattani e Nassar, op. cit):

$$a^2_{OHDTBB}(t) = a_0^2\ \alpha^2(t)\ \left\{1 + (2\zeta/\tau)\ \left[\int_0^t dt'/\alpha^2(t')\right] + \left[(1+\zeta^2)/\tau^2\right]\left[\int_0^t dt'/\alpha^2(t')\right]^2\right\},$$

onde $\alpha(t)$ satisfaz a expressão: $\ddot{\alpha}(t) + \Omega^2(t)\,\alpha(t) = 0$.

É interessante ressaltar que Bassalo, Alencar, Cattani e Nassar (op. cit) aplicaram a expressão acima para um caso particular de $\Omega(t)$, considerado por A. Mostafazadeh [*Physical Review* A55; p. 1653; 4084 (1997) e *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General* 31, p. 6495 (1998)], J. Y. Ji, J. K. Kim e S. P. Kim [*Physical Review* A51, p. 4268 (1995)], C. F. Lo [*Physical Review* A43, p. 404 (1991)], e G. S. Agarwal e S. A. Kumar [*Physical Review Letters* 67, p. 3665 (1991)] e verificaram que novos estados quânticos espremidos (``squeezed'') generalizados podem ser encontrados. Note-se que esses estados foram encontrados por Nassar, em 1998 (DF/UFPA), e são definidos pela expressão: $[\Delta x(t)/\Delta x(0)]^2 = [a(t)/a(0)]^2$, onde Δx indica a variância associada à variável x. Esses físicos também observaram que a MQBB descreve melhor a situação física considerada do que a MQOS, uma vez que com MQBB podemos estabelecer uma conexão direta entre as soluções clássica e quântica.
