SEARA DA CIÊNCIA

CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo

A Simetria na Matemática, na Arte e na Literatura.

Em verbetes desta série, vimos que a simetria tem representado um papel importante no estudo da Física. Neste verbete, vamos tratar de outros papéis da simetria e suas quebras. A tradição judaico-cristã ao explicar que o Universo teve um **Criador** proporcionou a crença de que a Natureza apresenta simetrias e conservações, cuja associação reflete leis da própria Natureza [J. Rosen and Y. Freundlich, *American Journal of Physics* **46**, p. 1030 (1978)]. Dessa forma o *Homo Sapiens* ao formular modelos e teorias por intermédio daquela associação, as quais, conseqüentemente, traduziam aspectos das leis naturais, revelou que tanto a simetria em si, como a quebra de algum padrão de simetria, poderia servir de instrumento para obtenção de conhecimento [Henrique Fleming, *Ciência e Filosofia* **1**, p. 99 (1979)], e, um dos primeiros exemplos encontra-se nos escritos dos gregos antigos. Com efeito, o filósofo grego Pitágoras de Samos (c.560-c.480) descobriu que determinadas relações entre os comprimentos das cordas dos instrumentos musicais, associado à variação de tensão nas mesmas, produziam sons harmoniosos. Em conseqüência de tal descoberta, Pitágoras e seus seguidores formularam a seguinte lei: *Os números (inteiros e racionais) governam o mundo*. Registre-se que racionais, significa uma razão entre dois números inteiros: p/q. [Isaac Asimov, **Os Gênios da Humanidade** (Bloch Editores, 1974).]

A **simetria aritmética pitagórica** referida acima não prevaleceu por muito tempo, uma vez que os próprios pitagóricos descobriram que a aplicação do teorema de seu patrono ("o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo vale a soma dos quadrados de seus catetos"), a certos números inteiros, não reproduziria também um número inteiro. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado unitário, isto é, $\sqrt{2}$, não poderia ser representado por números inteiros ou racionais. Desse modo, a descoberta dos ***números irracionais*** (que, portanto, não podem ser escritos na forma de uma razão) provocou a quebra da **simetria pitagórica**. Registre-se que, segundo nos fala o filósofo austríaco Sir Karl Raymund Popper (1902-1992) em seu livro **Conjecturas e Refutações** (EDUnB, ~ 1972), parece haver sido um membro da Escola Pitagórica de nome Hipasus de Metapontum (f.c. Século 5 a.C.), por volta de 400 a.C., quem fez aquela descoberta e, por essa razão, teria sido jogado ao mar por essa traição, e morrido em conseqüência. No entanto, existe uma versão histórica que diz haver ele morrido realmente no mar, porém de morte natural [Margaret E. Baron, **Origem e Desenvolvimento do Cálculo: A Matemática Grega** (EDUnB, 1985)].

Ainda na Grécia Antiga, uma outra simetria matemática surgiu. Trata-se da **simetria geométrica platônica**. Com efeito, para o filósofo grego Platão de Atenas (c.428-c.347) e seus seguidores, a ordem universal era a geométrica, já que acreditavam que os quatro elementos fundamentais do Universo, ou seja, água, ar, fogo e terra (veja verbete nesta série), se relacionavam com os poliedros regulares pitagóricos, da seguinte maneira: água-icosaedro (dez faces), ar-octaedro (oito faces), terra-hexaedro (seis faces) e fogo-tetraedro (quatro faces). O dodecadro (doze faces), simbolizava o Universo como um todo, concluíam os platônicos.

A crença de que a simetria universal era a geométrica foi fortalecida quando os platônicos observaram que o irracional $\sqrt{2}$ poderia ser construído geometricamente por intermédio de régua e compasso. Para isso, bastaria desenhar um triângulo retângulo de catetos unitários e sua hipotenusa (de valor $\sqrt{2}$ pelo Teorema de Pitágoras) poderia ser retirada pelo compasso. Não obstante esse grande feito, os platônicos se defrontaram com uma enorme dificuldade, qual seja, a de construir geometricamente, com régua e compasso, o número π (~ 3,1416), que representa a relação entre o comprimento ($2\pi r$) e o diâmetro ($d = 2r$) de uma circunferência (relação essa já conhecida pelos babilônicos e egípcios, em 2000 a.C.), construída com um compasso. Antes de prosseguir com as conseqüências dessa dificuldade geométrica, falemos um pouco sobre esse número famoso.

Uma das mais antigas referências ao valor de π encontra-se no papiro egípcio Rhind-Ahmes. Neste documento, o escriba Ahmes escreveu em 1700 a.C., o seguinte: *Corte 1/9 do diâmetro de um círculo e construa um quadrado com o restante; esse quadrado tem a mesma área do círculo.* Seguindo esse escrito, e considerando que a área do círculo, de raio r, vale $\pi r^2 = \pi d^2/4$ e que a área do quadrado proposto por Ahmes vale $(8\ d/9)^2$, então, segundo o proposto por Ahmes, π terá o seguinte valor: 256/81 ~ 3,1604938. Registre-se que esse papiro foi adquirido pelo advogado e egiptologista escocês Alexander Henry Rhind (1833-1863), em 1858. Uma outra referência histórica ao valor desse número encontra-se na descrição do local de banho dos sacerdotes do templo do Rei Salomão (f.c. metade do Século 10 a.C.), que apresentava a forma circular com "dez côvados de uma borda a outra, e de cinco côvados de alto; cingia-o em roda um cordão de trinta côvados". Registre-se que o "côvado" era uma antiga medida no Egito antigo, que vai do cotovelo até as pontas dos dedos, correspondendo a 18 polegadas, cerca 45,72 cm. É oportuno lembrar que o símbolo π parece haver sido pela primeira vez apresentado pelo matemático galês William Jones (1675-1749), em seu livro intitulado **Synopsis palmariorum matheseos** (Londres, 1706). [J. D. Struik (Editor), **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969); Tobias Dantzig, **Número: a Linguagem da Ciência** (Zahar Editores, 1970); J. Maurício O. Matos: **Pequena História de π** (www.searadaciencia.ufc.br, acesso 2/12/2008)].

Voltemos ao problema da geometrização do número π. A solução dessa questão era fundamental para resolver o famoso problema da ***quadratura do círculo***, isto é, construir geometricamente, com régua e compasso, um quadrado de área equivalente a de um círculo de raio unitário. Esse problema, nesse caso especial, era equivalente ao da construção geométrica do π, uma vez que a área do círculo unitário vale π (lembrar que a área do círculo de raio r, vale: πr^2). Essa questão, associada a mais duas igualmente famosas: ***trissecção do ângulo*** e ***duplicação do cubo***, cujas soluções geométricas não foram também obtidas por essa ocasião, quebraram a **simetria geométrica platônica**. A solução desses problemas só aconteceu com o desenvolvimento da Álgebra. Lembrar que esse vocábulo vem do livro intitulado **Al-jabr w´al muqâbala**, escrito em 830 pelo astrônomo e matemático árabe Abu Ja´far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (c.800-c.847) [Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972)].

É interessante registrar que o problema da ***duplicação do cubo*** tem origem na seguinte lenda. Em 429 a.C., o estadista grego Péricles, nascido em Atenas, por volta de 495 a.C., morreu de peste juntamente com um quarto da população de sua cidade natal. Consternados por essa enorme perda, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo em Delos sobre como combater a peste. A resposta dada pelo o oráculo foi a de que o altar de Apolo, que tinha a forma de um cubo, fosse duplicado. Imediatamente foi construído um novo cubo com o dobro da aresta (a) do cubo anterior; porém a peste não acabou. Certamente o oráculo não cumpriu sua palavra pois os atenienses haviam multiplicado por oito o volume do altar primitivo. O erro dos atenienses decorreu do fato de que eles não sabiam obter, com régua e compasso, a raiz cúbica do número dois ($\sqrt[3]{2}$). Com efeito, para cumprir a determinação do oráculo, os atenienses deveriam calcular a nova aresta

A a partir da expressão (lembrar que o volume de um cubo é igual a sua aresta ao cubo): $\mathbf{A^3 = 2\,a^3 \rightarrow A = a\,\sqrt[3]{2}}$. O que os atenienses fizeram foi o seguinte: $\mathbf{A^3 = (2\,a)^3 = 8\,a^3}$.

Pois bem, voltemos ao problema da Álgebra. Com o desenvolvimento dessa parte da Matemática, que se iniciou (ou pelo menos se formalizou) com os árabes, mostrou-se que a solução geométrica de um certo problema por intermédio de régua, só poderá ser encontrada se este problema puder ser escrito na forma de uma equação algébrica linear com coeficientes racionais. Por outro lado, a solução de um problema pelo compasso, só poderá ser obtida se o mesmo puder ser traduzido por uma equação algébrica quadrática (do segundo grau) também com coeficientes racionais. No entanto, a ***trissecção do ângulo***, ou seja, a divisão de um ângulo qualquer em três partes, e a ***duplicação do cubo***, levam a equações algébricas cúbicas ($4\,x^3 - 3\,x - a = 0$, sendo a uma fração própria, e $x^3 - 2 = 0$, respectivamente), daí por que não podem ser resolvidas por régua e compasso. Por seu lado, o problema da ***quadratura do círculo*** teria a seguinte formulação algébrica: $L^2 = \pi r^2$, que é uma equação envolvendo duas variáveis: o lado L do quadrado e o raio r do círculo.

Certamente, a dificuldade em tratar tais problemas geometricamente é que levou o grande matemático grego Euclides de Mégara (323-285) a não os tratar em seu famoso livro **Elementos de Geometria**. É importante salientar que esses três famosos problemas foram paulatinamente sendo resolvidos na medida em que a Matemática foi evoluindo. Por exemplo, a solução do mais famoso deles, a ***quadratura do círculo***, foi sendo encontrada em várias etapas. Primeiro, o matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777), em 1770 (*Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* **2**, p. 140), mostrou que π era um número irracional. Por sua vez, o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), em 1794, mostrou que π não poderia ser a raiz de uma equação algébrica com coeficientes racionais. [Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (John Wiley and Sons, 1968); Struik, op. cit.] Por fim, o matemático alemão Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), em 1882 (*Mathematische Annalen* **20**, p. 213), provou que π não satisfaz a qualquer equação algébrica com coeficientes racionais. Desse modo, ficou confirmado que o π é um ***número transcendental*** pois, segundo o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783), “ele transcende o poder dos métodos algébricos” (Kline, op. cit.; Matos, op. cit.).

A concepção filosófica sobre simetria e suas quebras, também foi utilizada pelos artistas da Antiguidade, na medida em que procuravam uma conexão entre simetria e beleza. Nesse sentido, é célebre o trabalho do escultor grego Polykleitos (f.c. Século 5 a.C.) e intitulado ***Doryphorus***, escultura na qual são representadas as proporções perfeitas do corpo humano. Registre-se que, muitos séculos depois, essa relação seria reafirmada pelo pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528) com o famoso cânone de proporções do corpo humano apresentado em seu texto **Estudo das Proporções**, escrito entre 1505 e 1510 (Fleming, op. cit.). No entanto, nas representações artísticas dos gregos antigos (assim como nos baixos-relevos mexicanos e indianos) encontramos uma ligeira quebra de simetria geométrica em sua concepção, mostrando que também se pode relacionar beleza com assimetria (M. Gourdin, **Les Symetries des Particules Elementaires,** *La Recherche* **21**, p. 243, 1972). Será que a quebra de simetria encontrada em outras manifestações artísticas, haja levado o poeta e crítico literário Samuel Taylor Coleridge (1772-1834), à sua famosa definição de beleza: *Beleza é a unidade na variedade?*. [Sobre essa definição, ver: Jacob Bronowski, **Ciência e Valores Humanos** (Editora Itatiaia Limitada e EDUSP, 1979)].

Em conclusão, destacaremos mais um aspecto da simetria e sua quebra. Na Antiguidade, uma das maneiras de se observar a quebra da simetria, entendida esta como harmonia, a regularidade da ***oratione prosa*** (discurso direto, livre, em linha reta) era a utilização do ***verso***. Este era o movimento de retorno para a segunda linha métrica quando a primeira já havia sido completada. Ora, retornar significava interromper a simetria do discurso direto, impedindo, com isso, que o pensamento seguisse regularmente seu rumo e, muitas vezes, seu ritmo. Assim, a oração, a frase, a proposição, ficavam interrompidas pelo número de pés ou sílabas, de cesuras etc., que o tipo de discurso, oposto à prosa, requereria. Exemplo correspondente pode ser conferido à Música. Nesta, a quebra de simetria repetitiva e monótona, observa-se com a introdução das variantes na repetição dos temas. Para maiores detalhes, ver. Célia Coelho Bassalo, **Introdução à Teoria Literária** (DLLV/UFPA, 1986).