SEARA DA CIÊNCIA

CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo

Rainha Dido de Cartago e o Cálculo das Variações.

Historicamente, o primeiro problema do Cálculo das Variações foi o chamado **problema isoperimétrico** ou **problema da Rainha Dido de Cartago**. Vejamos a origem desse nome. Segundo a Mitologia Romana, a Princesa Dido (Elisa) era filha do Rei Mutto (Belus) de Tiro (cidade fenícia) e mulher de Siqueu (Acerbas). Depois que este foi morto pelo Príncipe Pigmaleão (irmão de Dido), ela refugiou-se na costa do Mediterrâneo, no Norte da África. Lá chegando, dirigiu-se a Jarbas (Rei dos Gétulos) e barganhou certa quantia com a qual ela poderia comprar terras que poderiam ser envolvidas com um pedaço de couro de touro. Como Jarbas aceitou essa oferta, a esperta Dido cortou o couro em várias tiras, ligou-as pelas extremidades e procedeu a envolver a área de terra desejada tendo o comprimento dessas fitas como perímetro. Escolhendo terra ao longo do mar, ela não precisou usar fitas ao longo da costa marítima. Ao estender o couro em forma de semicírculo, obteve a máxima área de terra possível. Desse modo, Dido estabeleceu o Estado de Cartago (hoje Tunísia), em 850 a.C., a futura rival de Roma. Conta ainda a lenda que, como Cartago prosperou bastante, Jarbas pediu-a em casamento. Para fugir a esse assédio, a então **Rainha Dido** preparou uma pira funeral e suicidou-se na frente de seu povo. Cremos ser oportuno dizer que existem outras versões para essa extrema atitude da **Rainha Dido**, como, por exemplo, a descrita pelo poeta romano Publius Vergilius Maro (Virgílio) (70-19), em seu inacabado poema épico **Eneida**, iniciado cerca de 30 a.C. [Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972); *The New Enciclopaedia Britannica* **4**; **12** (Enciclopaedia Britannica, Inc./Chicago University, 1993)].

Em linguagem matemática, o **problema da Rainha Dido de Cartago** apresenta a seguinte formulação. Dada uma curva com um determinado perímetro, qual a forma geométrica que a mesma deve ter para que envolva a máxima área possível? A solução desse problema – o círculo - foi encontrada com o desenvolvimento do **Cálculo das Variações**, conforme veremos a seguir.

O **Cálculo das Variações** inicia-se com um problema discutido pelo físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) no Livro II de seu célebre tratado intitulado **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (“Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”), publicado em 1687. Nesse Livro, ele estava interessado em saber a forma de uma superfície de revolução, movendo-se em um fluido com velocidade constante na direção de seu eixo, sob uma pressão perpendicular a essa superfície e proporcional ao quadrado da velocidade na direção da normal a essa mesma superfície. Inicialmente, no **Principia**, ele apenas deu uma caracterização geométrica da forma desejada, mas em carta presumivelmente escrita, em 1694, ao astrônomo escocês David Gregory (1661-1708), ele apresentou a solução que, conforme o próprio Newton afirmou, poderia ajudar na construção de navios. Hoje, problemas desse tipo também são importantes na construção de aviões e submarinos (Kline, op. cit.). A solução de Newton, na forma algébrica: $y\,dx\,dy^3 = a\,ds^3$, também foi encontrada, mais tarde, em trabalhos independentes, pelos matemáticos, o suíço Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), em 1697 (*Acta Eruditorium*, maio), o francês Guillaume François Antoine, Marquês de l´Hôpital (1661-1704), em 1699 (*Acta Eruditorium*, agosto), e o também suíço John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748), ainda em 1699 (*Acta Eruditorium*, novembro). [Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (John Wiley and Sons, 1968); D. J. Struik (Editor), **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969)]. Em notação atual, esse problema resume-se em encontrar o valor mínimo da seguinte integral:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)\left[y'(x)\right]^3 dx}{1+\left[y'(x)\right]^2} .$$

Outro problema famoso do **Cálculo das Variações** foi o proposto por John Bernoulli, em 1696 (*Acta Eruditorium*, junho, p. 269). Trata-se do seguinte: - *Dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontrar o caminho que uma partícula* (*com velocidade* v)*, somente sob a ação da gravidade, o descreverá no tempo mínimo*. Com se pode ver, este não é simplesmente um problema de determinar o valor extremo de uma função, já que se trata de escolher, dentre todas as curvas que passam pelos pontos A e B, aquela que é descrita em um tempo (t) mínimo. Em notação atual, esse problema resume-se em minimizar a seguinte integral:

$$I = \int_A^B dt = \int_A^B ds / v = \int_A^B \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} dx.$$

Note-se que esse problema foi tratado, independentemente, pelos matemáticos, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), o suíço James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705), o saxão Conde Ehrenfried Walther Tschirnhaus(en) (1651-1708), além de Newton, l´Hôpital e John Bernoulli (irmão de James), cujos resultados foram publicados no mesmo volume da *Acta* de maio de 1697. Todos (com exceção de l´Hôpital) demonstraram que a curva procurada [denominada por John de ***braquistócrona*** (do grego ***brachistos*** – mais curto e ***chronos*** – tempo)] era a ciclóide. É interessante destacar que, para encontrar essa solução, John (p. 206) propôs que a curva de queda mais rápida era a descrita pela refração de um raio de luz ao atravessar um meio de índice de refração variável. Desse modo, considerou um meio refringente composto de camadas estreitas de índices de refração diferentes e aplicou a Lei da Refração de Snell (1621)-Descartes (1637) (vide verbete nesta série). O método usado por James (p. 211) foi mais geométrico. Destaque-se, também, que o astrônomo e físico italiano Galileu Galilei (1564-1642), em estudos realizados entre 1630 e 1638, havia tentado encontrar a ***braquistócrona***. Porém ele não conseguiu encontrá-la, já que apenas demonstrou que o arco de círculo exige menos tempo de queda ao invés de uma poligonal. [José Maria Filardo Bassalo, **Crônicas da Física, Tomo 5** (EDUFPA, 1998); Kline, op. cit.].

No Século 18, o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) lidou com dois novos problemas do **Cálculo das Variações**: 1) ***Geodésica*** - *Calcular a menor distância* (*geodésica*) *entre dois pontos sobre superfícies, usando a propriedade de que os planos osculatrizes (formados pelos círculos osculatrizes) das geodésicas cortam perpendicularmente essas superfícies*; 2) ***Superfície Mínima*** – *Determinar uma curva plana* [y = f(x)] *ligando dois pontos* [(x_1, y_1); (x_2, y_2)] *tal que*, *quando ela gira em torno do eixo dos* x, *gera uma superfície de área mínima*.

O primeiro problema (***Geodésica***) foi proposto por John Bernoulli, em 1697 (*Journal de Sçavans*). Mais tarde, em 1728, ele escreveu uma carta a Euler pedindo-lhe que encontrasse uma solução para esse problema. Ainda em 1728 (*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **3**, p. 110, publicado em 1732), Euler resolveu esse problema apresentando as equações diferenciais para ***geodésicas*** sobre superfícies. Note-se que, em 1732 [*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **6** (1732-1733), p. 36, publicado em 1738], o matemático suíço Jakob Hermann (1678-1733) também encontrou ***geodésicas*** sobre superfícies particulares, o mesmo acontecendo com o matemático e astrônomo francês Aléxis Claude Clairaut (1713-1765), em seus trabalhos sobre a determinação da forma da Terra, realizados em 1733, 1735, 1739 e 1741. É oportuno esclarecer que se chama de ***círculo osculatriz*** (nome cunhado por Leibniz, em 1686) de uma superfície curva em um dado ponto P ao círculo com centro no centro de curvatura e raio igual ao raio de curvatura da superfície em questão e relativos ao ponto P, e que a tangencia neste mesmo ponto. Esse conceito foi introduzido por Newton, no livro intitulado **Geometria Analytica**, escrito em 1671 e publicado somente em 1736. (Kline, op. cit.). Esclareça-se, também, que James, em 1698, já havia resolvido o problema da ***geodésica*** para superfícies particulares, tais como: cilíndricas, cônicas e de revolução.

O problema da ***Superfície Mínima*** foi resolvido por Euler, em 1744, no livro intitulado **Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maxima Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti** ("Um Método de Descobrir Linhas Curvas que Apresentam a Propriedade de Máximo ou Mínimo ou a Solução do Problema Isoperimétrico Tomado em seu Sentido mais Amplo"). Em notação atual, esse problema resume-se em minimizar a seguinte integral:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

O livro de Euler citado acima reuniu seus trabalhos sobre o **Cálculo das Variações**, iniciados em 1734. Por exemplo, já em 1734 [*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **7** (1734-1735), p. 135, publicado em 1740], Euler generalizou o problema da ***braquistócrona*** ao minimizar outras quantidades além do tempo. O método usado por Euler para fazer essa generalização consistiu em estudar os extremos (máximo e mínimo) de uma função (funcional) (f) representada pela integral (em notação atual):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx.$$

Para realizar essa tarefa, Euler calculou a variação (hoje δ) de J e, ao igualar a mesma a zero (δ J = 0), obteve a seguinte expressão:

$$f_x - d/dx(f_y) = 0, \quad \text{com: } f_x = \partial f/\partial x;\ f_y = \partial f/\partial y';\ y' = dy/dx.$$

Logo depois, em 1736 [*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **8** (1736), p. 159, publicado em 1741], Euler apresentou essa equação na forma atual (Kline, op. cit.):

$$f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} - y'' f_{y'y'} = 0.$$

Em 1742, o matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de John, escreveu uma carta para Euler, propondo-lhe que encontrasse a solução do seguinte problema: - *Encontrar a forma de um bastão elástico, de comprimento* L, *sujeito a uma força axial, assumindo que seja mínimo o quadrado da curvatura ao longo da curva formada pelo bastão fletido*. Registre-se que, em linguagem atual, esse problema trata de minimizar a seguinte integral: $\int_0^L ds/R^2$, onde s é o comprimento de arco e R é o raio de curvatura. A solução desse problema foi apresentada por Euler, em um dos apêndices de seu livro **Methodus** acima referido, por intermédio de integrais elípticas. Aliás, estas surgiram no estudo da retificação de certas curvas (por exemplo: elipse, parábola, hipérbole, ciclóide e leminiscata), e os primeiros trabalhos foram realizados por James, em 1694 e John, em 1698, e pelo matemático italiano Conde Giulio Carlo de´Toschi di Fagnano (1682-1766), entre 1714 e 1718. (Bassalo, op. cit.).

Ainda em um dos Apêndices do **Methodus**, Euler apresentou uma nova formulação para o **Princípio de Mínima Ação** que havia sido enunciado pelo matemático francês Pierre Louis Moureau de Maupertuis (1698-1759), também em 1744 (*Mémoires de l´Academie des Sciences de Paris*, p. 417), ao propor o conceito de **ação** (m v s), onde m é massa de um corpo que se desloca com velocidade v e percorre o espaço s, e que satisfaz a seguinte condição: m v s = mínimo. Euler, então, apresentou o **Princípio de Maupertuis** por intermédio da expressão (m v s = m v v t = m v^2 t, com m constante) (na notação atual):

$$\delta \int v\,ds = \delta \int v^2 dt = 0,$$

expressão essa que indica que a **ação de Maupertuis** era mínima para movimento de partículas ao longo de curvas planas. É interessante ressaltar que, além de razões físicas, Maupertuis e Euler alegavam razões teológicas para o seu **Princípio**, já que achavam que as leis do comportamento da natureza possuem a perfeição digna da Criação de **DEUS** (Kline, op. cit.).

Os trabalhos de Euler sobre o problema variacional atraiu a atenção do matemático franco-italiano Joseph Louis, Conde de Lagrange (1736-1813), em 1750, quando era um jovem professor da *Escola de Artilharia*, em Turim, na Itália. Depois de ler esses trabalhos, principalmente o **Methodus**, Lagrange descartou os argumentos geométricos usados por Euler e pelos irmãos John e James Bernoulli, quando trataram desse problema, e começou a estudá-lo sob o ponto de vista puramente analítico. Desse modo, em trabalhos realizados no período 1760-1761, nos quais comunicou à *Academia de Ciências de Turim* seu famoso artigo intitulado **Essa d´une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies** ("Ensaio sobre um novo método para determinar os máximos e os mínimos das fórmulas integrais indefinidas"), no qual apresentou seu ***método das variações***.

Nesse **Essai**, Lagrange usou um método diferente para determinar a curva y(x) que extremiza a integral (na notação atual):

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx.$$

Desse modo, ao invés de variar individualmente as coordenadas da curva y(x), ele introduziu novas curvas entre seus pontos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e representadas na forma f (x) + δ y (x), onde δ era um símbolo especial introduzido por Lagrange para representar a **variação** de y(x). Assim, ele calculou a "variação" de J:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y - (d/dx)(f_{y'})]\delta y\,dx,$$

e ao fazer δ J = 0, encontrou a seguinte equação:

$$f_x - d/dx(f_y) = 0, \quad \text{com: } f_x = \partial f/\partial x;\ f_y = \partial f/\partial y';\ y' = dy/dx,$$

E como ela já havia sido deduzida por Euler, essa equação ficou conhecida como a **Equação de Euler-Lagrange**. Registre-se que, ainda nesses trabalhos, publicado em 1762 [*Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinesis* **2** (1760-1761), p. 173], Lagrange obteve o **Princípio de Maupertuis-Euler** por intermédio da ***força viva leibnitziana*** ($T = m v^2$) de um corpo de massa m e velocidade v (em notação atual):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0.$$

É interessante ressaltar que o nome **Cálculo das Variações** foi dado por Euler no trabalho intitulado **Elementa Calculi Variationum** ("Elemento do Cálculo das Variações"), apresentado à *Academia de Berlim*, em 1756, e publicado em 1766 [*Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **10** (1764), p. 141].

Mais tarde, em 1788, Lagrange publicou o livro **Mécanique Analytique**, no qual usou seu "método variacional" e aplicou à Mecânica, deduzindo a seguinte equação (também conhecida como **Equação de Euler-Lagrange**):

$$d / dt[(\partial T / \partial \dot{q}_i)] - \partial T / \partial q_i + \partial V / \partial q_i = 0,$$

onde T ($\dot{q}_i$) é a ***energia cinética***, V (q_i) é a ***energia potencial*** de um sistema de n partículas, e ($q_i, \dot{q}_i$) são as ***coordenadas generalizadas*** conceituadas por Lagrange, em 1782. Também nesse livro, Lagrange estudou o movimento espacial das partículas constituintes de um fluido, por intermédio de suas trajetórias, estudo esse hoje conhecido como ***descrição lagrangeana***. Destaque-se que, quando a descrição do movimento do fluido é realizada por um observador fixo no espaço, ela é chamada de ***descrição euleriana***, a partir dos estudos hidrodinâmicos realizados por Euler. [Clifford Ambrose Truesdell, **Essays in the History of Mechanics** (Springer-Verlag, NY, 1968).]

Apesar dos trabalhos de Euler e de Lagrange sobre o **Cálculo das Variações**, vistos acima, havia uma dificuldade com os mesmos, uma vez que a **Equação de Euler-Lagrange** só fornecia (e ainda fornece) apenas a *condição necessária* para estudar o máximo ou o mínimo de um dado funcional, sem, no entanto, decidir qual desses dois (máximo ou mínimo) resolveria o problema. Faltava a *condição suficiente* tal como acontece no cálculo ordinário de uma função [f(x)], em que o sinal da segunda derivada [f''(x)] determina o extremo: positivo (+) para o mínimo, e negativo (-) para o máximo, conforme demonstrou o matemático francês Michel Rolle (1652-1719), em 1691. Essa questão, envolvendo a segunda variação δJ^2, foi amplamente discutida pelos matemáticos, o francês Adrien Marie Legendre (1752-1833), em 1786 e 1787; e os alemães Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), em 1837, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), em 1879, e David Hilbert (1862-1943), em 1900. Para detalhes dessa discussão, ver: Kline, op. cit.; Bassalo, op. cit.

Na conclusão deste verbete, ressaltemos que a **Equação de Euler-Lagrange** recebeu uma nova formulação, em 1809 (*Journal de l´École Polytechnique* **8**, p. 266), pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), ao definir a função ***lagrangeana***: L = T ($\dot{q}_i$)– V (q_i). Dessa maneira, ele escreveu que:

$$(d / dt)(\partial L / \partial \dot{q}_i) - \partial L / \partial q_i = 0,$$

também conhecida como **Equação de Euler-Lagrange-Poisson**. É oportuno destacar que essa equação é hoje uma das mais fundamentais na Teoria Quântica dos Campos, para poder estudar as interações fracas e fortes (vide verbete nesta série), das quais não se conhece o potencial V (q_i). Desse modo, para estudar a dinâmica delas, é necessário propor a ***lagrangeana*** L($q_i, \dot{q}_i$) correspondente. [Marcelo Otávio Caminha Gomes, **Teoria Quântica dos Campos** (EDUSP, 2002)].

É oportuno destacar que, a solução de alguns problemas variacionais estudados neste verbete, pode ser encontrada em: José Maria Filardo Bassalo, **Métodos da Física Teórica II** (DFUFPA, mimeo, 1989).

ANTERIOR SEGUINTE