CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo

www.bassalo.com.br

Leibniz e os Primórdios do Formalismo do Cálculo Diferencial e Integral.

Em 1637, o matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) publicou o artigo intitulado **Methodus ad Disquerendam Maximam et Minimam** ("Método de Encontrar Máximos e Mínimos"), no qual apresentou um método para traçar tangente a uma dada curva. Hoje, o âmago desse método resume-se no seguinte: mudar a variável x na função f(x) (que representa a curva dada) para x + E (com E muito pequeno); considerar f(x) estacionário próximo de seu máximo ou de seu mínimo, o que significa dizer que f(x + E) - f(x) vai mais rápido a zero do que E; fazer $E \to 0$. Então, para obter o ponto em que a curva passa por um máximo ou por um mínimo, basta igualar o resultado anterior a zero. Resumindo-se, temos:

$$f'(x) = \lim_{E \to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0.$$

Desse modo, para Fermat, f' (x) significava a tangente à curva representada por f(x). É oportuno registrar que, em virtude desse método, o matemático francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827) considerava Fermat o inventor do **Cálculo Diferencial**.

Por outro lado, em 1675, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), começou a escrever seus célebres manuscritos (datados de 25, 26 e 29 de outubro e 11 de novembro) que contribuíram para o desenvolvimento do hoje famoso **Cálculo Diferencial e Integral**. Assim, nos manuscritos de 25 e 26 de outubro, iniciou seus estudos sobre o cálculo de áreas, usando o método introduzido pelo matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que consistia em comparar os indivisíveis de uma figura com os de uma outra. Então, ele adicionava esses indivisíveis, usando a expressão "omnes lineae" ($o.\ell$) ("todas as linhas"). [D. J. Struik (Editor), **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969)]. Leibniz, contudo, abreviou essa notação para "omn.ℓ", e a mesma indicava a área de uma curva cujas ordenadas são ℓ. No manuscrito de 29 de outubro, inicialmente Leibniz apresentou a *regra de integração por partes*:

$$\text{omn. } x\,\ell \cap x \text{ omn. } \ell - \text{omn. omn. } \ell,$$

onde o símbolo $\cap$ indicava igualdade (=), símbolo este que já havia sido proposto pela matemático inglês Robert Recorde (1510-1558), em seu livro **Whestone of Witte**, de 1557. Com a regra relatada acima, Leibniz demonstrou que:

$$\text{omn. } x^2 \cap x^3/3.$$

No entanto, ainda no manuscrito de 29 de outubro, Leibniz decidiu, repentinamente [Margareth E. Baron e H. J. M. Bos, **Origens e Desenvolvimento do Cálculo 3** (EDUnB, 1985)], substituir omn. pelo símbolo $\int$, que é o S estilizado do calígrafo, que significa **Suma** ("Soma"). Ainda nesse manuscrito, Leibniz encontrou regras para operar com $\int$, ou seja:

$$\int a\, \ell = a \int \ell \text{ (a = constante)} \quad \text{e} \quad \int (y + z) = \int y + \int z,$$

bem como introduziu o símbolo d para denotar a ***diferenciação*** como operação inversa de tomar a "quadratura" (hoje, ***integral***); porém, esse símbolo atuava como um denominador, conforme se pode ver, segundo Leibniz escreveu nesse manuscrito:

Suponha que $\int \ell \cap y\, a$ *. Seja* $\ell \cap y\, a/d$, *então assim como* $\int$ *aumenta, d diminui as dimensões*.

No manuscrito de 11 de novembro [Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1973)], Leibniz observou que nem $\int$ *aumenta* a dimensão, e nem d *diminui*, e que, realmente, $\int$ significa uma **soma** e d uma **diferença**. A partir daí passou a usar **d y**, e começou a procurar regras para o símbolo d, pois estava convencido de que:

$$d\,(u\,v) \neq du\,.\,dv \quad \text{e} \quad d\,(u/v) \neq du\,/\,dv.$$

Em 1676, Leibniz escreveu dois manuscritos (julho e novembro) nos quais tratou de como traçar tangentes em curvas, assim como obteve as primeiras regras de derivação e de integração. Com efeito, no de junho, ele demonstrou que a melhor maneira de se encontrar tangentes a curvas [representadas por funções do tipo: y = f(x), em notação atual] é obter a relação dy/dx, onde dy e dx são diferenças e a dita relação é um quociente. Para chegar a esse resultado, Leibniz considerou (sem nenhuma explicação) que o produto dessas diferenças ou potências mais altas delas deveriam ser desprezadas. No manuscrito de novembro, Leibniz encontrou as seguintes regras gerais:

$$dx^n = n\, x^{n-1}\, dx; \quad \int x^n = x^{n+1}/(n+1),$$

com n inteiro ou fracionário, assim como obteve a ***regra da cadeia***:

Para diferenciar a expressão $\sqrt{a+bz+cz^2}$ *, façamos* $a+bz+cz^2$ *= x, diferenciemos* $\sqrt{x}$ *e multipliquemos o resultado por dx/dz*.

Essa regra, hoje, significa que, dado y [x(z)], então: dy/dz = (dy/dx) (dx/dz).

Em um manuscrito de 11 de julho de 1677, Leibniz apresentou as regras corretas para obter a diferencial da soma, do produto e do quociente entre duas funções (em notação atual) [u (x), v (x)], porém, sem demonstrá-las. Essas regras são:

$$d\,(u + v) = du + dv; \qquad d(uv) = udv + vdu; \qquad d(u/v) = (vdu - udv)/v^2.$$

Em 1680, Leibniz atribui para dx e dy os significados respectivos, de diferenças de abcissas e de ordenadas, sendo que para dy nomeou especificamente de ***diferença momentânea***. Ainda nesse mesmo ano, Leibniz mostrou que para se obter a área (A) sob uma curva bastaria somar retângulos de altura y e de base dx: $A = \int y\, dx$; apresentou a fórmula para calcular um elemento de arco ds, ou seja: $ds^2 = dx^2 + dy^2$; assim como o volume (V) de um sólido gerado pela revolução de uma curva em torno do eixo dos x: $V = \int y^2\, dx$.

Em 1684 (*Acta Eruditorum Lipsiensium* **3,** p. 467) Leibniz publicou o artigo intitulado **Nova Methodus pro Maximis et Minimis itemque Tangentibus quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur et Singulare pro illis Calculi genus** ("Um Novo Método para Máximos e Mínimos assim como para Tangentes não Impedido por Quantidades nem Fracionais nem Irracionais e um Importante tipo de Cálculo para elas"). Nesse artigo, Leibniz usou pela primeira vez a palavra ***transcendental*** no sentido de não-algébrico, assim como introduziu a expressão **Calculus Differentialis**

(“Cálculo Diferencial”). Também nesse artigo ele deduziu as regras de operação de d, regras essas que ele havia somente apresentado em 1677. Por exemplo, para a regra da diferencial do produto de duas funções ele fez a seguinte demonstração (desprezando diferenças de segunda ordem):

$$d(uv) = (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + du.dv \approx udv + vdu.$$

Ainda nesse artigo, Leibniz fez aplicações de seu método ao demonstrar como se calculam tangentes, máximos e mínimos (dv = 0), concavidade e convexidade, e pontos de inflexão (d dv = 0), para diversas curvas.

Em 1686 (*Acta Eruditorum Lipsiensium* **5,** p. 292), Leibniz apresentou a sua famosa **Regra de Leibniz** para calcular a derivada n-ésima de um produto de duas funções [u(x), v(x)]. Na linguagem atual, temos (os expoentes entre parêntesis indicam as ordens de derivação):

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\, v^{(0)} + nu^{(n-1)}\, v^{(1)} + [n(n-1)/2!]\, u^{(n-2)}\, v^{(2)} + \ldots + nu^{(1)}\, v^{(n-1)} + u^{(0)}\, v^{(n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (d^n / dx^n)[u(x)v(x)] = \sum_{s=0}^{n} [n!/(n-s)!\,s!] \times (d^{n-s} / dx^{n-s})[u(x)] \times (d^s / dx^s)[v(x)].$$

Em 1691, Leibniz escreveu uma carta para o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) na qual indicou uma maneira de resolver equações diferenciais do tipo:

$$y\,(dx/dy) = f\,(x)\,g\,(y),$$

usando uma técnica que, mais tarde, ficou conhecida como ***separação de variáveis***. Ele escreveu a equação acima na forma:

$$dx/f\,(x) = g\,(y)\,dy/y,$$

e depois realizou a integração de cada termo. Ainda nesse ano de 1691, Leibniz reduziu as equações diferenciais de primeira ordem do tipo y’ = f (y/x) a um simples problema de ***quadratura*** (mais tarde: ***integração***), fazendo a seguinte substituição: y = v x.

É interessante chamar a atenção para o fato de que Leibniz também introduziu os símbolos ~ : “similar a” e $\cong$: “congruente a”, bem como as notações (.), para produto, (:) para divisão, $\log$ para ***logaritmo decimal*** e d^n, para a ***diferencial de ordem*** n. Em 1714, dois anos antes de morrer, Leibniz relatou no livro intitulado **Historia e Origo Calculi Differentialis** (“História e Origem do Cálculo Diferencial”) o desenvolvimento de seu próprio pensamento sobre o Cálculo. Nesse livro, Leibniz usou a palavra **função** para representar quantidades que dependem de uma variável. Contudo, o conceito atual de **função** bem como sua notação – f(x) – foram apresentados pelo físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), em seu livro intitulado **Introductio in Analysis Infinitorum** (“Introdução à Análise do Infinito”), escrito em 1745.