CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

A Invenção dos Logaritmos.

Em 1544, o matemático alemão Michael Stifel (c.1486-1567) escreveu o livro intitulado Arithmetica Integra (“Aritmética Renovada”) no qual observou que os termos de uma progressão geométrica (de razão r) (r^0, r^1, r^2, r^3, ...) correspondia aos termos de uma progressão aritmética (de razão 1) (0, 1, 2, 3, ...) formada pelos expoentes, da seguinte maneira: a multiplicação de dois termos da progressão geométrica resultava em um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na progressão aritmética. Por exemplo: $r^1 \times r^2 = r^3 \rightarrow 1 + 2 = 3$. É oportuno destacar que essa correspondência já havia sido observada pelo matemático francês Nicolas Chuquet (c.1445-c.1500) em seu livro Le Triparty en la Science des Nombres (“A Triparte na Ciência dos Números”), dividido em três seções e escrito em 1484. Porém, foi Stifel quem estendeu essa correspondência para expoentes e números negativos e fracionários usando a divisão entre eles. Assim: $r^2 / r^3 = r^{-1}$ o que implica $2 - 3 = - 1$.

Apesar de Chuquet e Stifel haverem observado essa correspondência, seu uso prático só foi realizado pelo matemático escocês John Napier (Neper) (1550-1617), por volta de 1594, e apresentado em dois livros: Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio [“Descrição do Maravilhoso Cânon (Princípio) de Logaritmos”], publicado em 1614, e Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio [“Construção do Maravilhoso Cânon (Princípio) de Logaritmos”], publicado postumamente em 1619. Napier estava interessado na facilitação de seus cálculos em trigonometria esférica para usá-lo em problemas astronômicos, daí haver mandado seus primeiros resultados para o astrônomo holandês Tycho Brahe (1646-1601). No entanto, suas tabelas de *logaritmos* (nome cunhado por Napier e que significa *número da razão*), derivavam da seguinte sequência: e^0, e^2, $e^{2,32}$, $e^{3,97}$, ... Note que, embora Napier usasse o nome logaritmos no título de seus livros, no texto ele se referia a *numerus artificialis* (“números artificiais”).

Foi também a facilitação de cálculos astronômicos que levou o fabricante de instrumentos, o suíço Joost Bürgi (1552-1632), que era assistente do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), em Praga, a inventar, independentemente, os logaritmos, por volta de 1600, mas só o apresentou no livro intitulado Progress Tabulen, publicado em 1620. Neste livro, há a primeira ideia sobre antilogaritmos. É interessante destacar que foi o matemático e astrônomo inglês Henry Briggs (1561-1630) quem sugeriu a Napier, em 1615, que usasse a base 10. Registre que seus próprios cálculos, nessa base, ele os apresentou no livro Arithmetica Logarithmica (“Aritmética Logarítmica”), editado em 1624. Note que, hoje, os logaritmos: neperiano e decimal são assim representados: ℓn e ℓog, e apresentam as seguintes propriedades:

$$(\ell og / \ell n)\,(ab) = (\ell og / \ell n)\,a + (\ell og / \ell n)\,b\,;\quad (\ell og / \ell n)\,(a^n) = n\,(\ell og / \ell n)\,(a);$$

$$(\ell og / \ell n)\,(a/b) = (\ell og / \ell n)\,a - (\ell og / \ell n)\,b.$$

É interessante ressaltar que essas propriedades dos logaritmos permitem a construção de gráficos bidimensionais *log-log* muito usados, por exemplo, em leituras de dados multiplicativos, principalmente envolvendo altas potências de 10. Desse modo, aquelas propriedades permitem que tais dados sejam representados por retas.

Em 1692 e 1694, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolveu regras para a diferenciação de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Em 1714, dois anos antes de morrer, Leibniz relatou no livro intitulado Historia e Origo Calculi Differentialis (“História e Origem do Cálculo Diferencial”) o desenvolvimento de seu próprio pensamento sobre o Cálculo. Nesse livro, Leibniz usou a palavra função para representar quantidades que dependem de uma variável. Um ano depois, em 1715, o matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), apresentou sua famosa *fórmula de Taylor* (em notação atual):

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)\,x + f''(a)\,x^2/2! + \ldots + f^{(n)}(a)\,x^n/n!,$$

onde [´, ´´, ... , $^{(n)}$] indicam a derivada (primeira, segunda, ... enésima) em relação a x, que permite escrever as funções exponenciais e logarítmicas em forma de séries (em notação atual)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k! \; ; \quad \ell n\,(x>0) = 2\sum_{k=1}^{\infty} [1/(2k-1)][(x-1)/(x+1)]^{2k-1} .$$

Apesar desse conhecimento sobre as funções exponencial e logarítmica, foi Euler, em seu livro intitulado Introductio in Analysis Infinitorum ("Introdução à Análise do Infinito"), escrito em 1745, que descobriu o caráter inverso das funções exponencial e logarítmica, ou seja, na linguagem de hoje:

$$y = e^x \equiv \exp(x) \;\rightarrow\; x = \ell n\, y.$$

Observe que a notação e para a base do logaritmo neperiano ou natural [nome dado pelo matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), em 1650], embora usado desde Napier, foi, por assim dizer, institucionalizado por Euler no livro Mecanica, sive Motus Scientia Analytice Exposita ("Mecânica, ou Exposição Analítica da Ciência do Movimento"), publicado em 1736. Por sua vez, o valor de e foi calculado por Euler em um manuscrito datado de 1777, por intermédio da expressão (em notação atual): $e = \lim_{k \to \infty} (1 + h^{-1})^h = 2{,}7182818284 \ldots$. É oportuno destacar que, nos livros: Introductio in Analysis Infinitorum ("Introdução à Análise do Infinito"), em dois volumes e publicados, em Lausanne, em 1748; Institutiones Calculi Differentialis ("Livros sobre o Cálculo Diferencial") publicado em Berlin, em 1755; e Institutiones Calculi Integralis ("Livros sobre o Cálculo Integral"), obra em três volumes, publicada em São Petersburgo, de 1768 a 1770, Euler introduz a noção de função e sua notação – f (x) – e encontra a relação entre as funções trigonométricas e exponenciais, por intermédio da hoje famosa equação de Euler:

$$\exp(\pm i\,x) = \cos(x) \pm i\,\mathrm{sen}(x),$$

onde i = $\sqrt{-1}$.[Carl B. Boyer, A History of Mathematics (John Wiley and Sons, 1968); D. J. Struik (Editor), A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (Harvard University Press, 1969); Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Oxford University Press, 1972)].
