



CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br



Propriedades Magnéticas Quânticas da Matéria: Para, Dia, Ferromagnetismo, Antiferromagnetismo e Ferrimagnetismo.

Em verbete desta série, analisamos as propriedades clássicas da matéria magnética: dia, para e ferromagnetismo. As duas primeiras (dia e para) foram estudadas pelo físico francês Paul Langevin (1872-1946), em 1905, ao admitir que os átomos e moléculas apresentavam um *momento magnético* (μ) intrínseco e permanente. Por sua vez, o também físico francês Pierre Ernst Weiss (1865-1940), em 1907, usou o *modelo de Langevin* para explicar o ferromagnetismo. Para isso, considerou que uma substância *ferromagnética* era constituída de pequenos dipolos magnéticos, submetidos a um intenso campo magnético interno – o *campo molecular* $H_m = q M$, com q sendo uma constante e M a magnetização. Esse *modelo de Weiss*, no entanto, apresentava algumas dificuldades insuperáveis sob o ponto de vista da Física Clássica (mecânica newtoniana, eletrodinâmica maxwelliana e mecânica estatística boltzmaniana). Por exemplo, o fator q de H_m havia sido calculado pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1878, como sendo $4\pi/3$, enquanto valores experimentais indicavam números da ordem de 10^3 . Por outro lado, o físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962; PNF, 1922) havia demonstrado em sua Tese de Doutorado defendida na *Universidade de Copenhague*, em 1911, que, segundo a Física Clássica, as contribuições do paramagnetismo e do diamagnetismo à *suscetibilidade magnética* se cancelavam. Esse resultado foi corroborado por Lorentz, em 1914, e por sua aluna, a física holandesa Hendrika Johanna van Leeuwen, em 1919.

Em 1920 (*Zeitschrift für Physik* 2, p. 201), o físico austro-norte-americano Wolfgang Pauli Junior (1900-1958; PNF, 1945) tratou o diamagnetismo das substâncias ionizadas, e encontrou para a *suscetibilidade diamagnética* (χ_{dia}), o mesmo valor que havia sido encontrado por Langevin (vide verbete nesta série). Mais tarde, em 1927 (*Zeitschrift für Physik* 41, p. 81), Pauli aplicou a ideia de *spin* (apresentada em 1925, conforme vimos em verbete nesta série) aos elétrons de condução e demonstrou

o aparecimento de uma pequena *suscetibilidade paramagnética* (χ_{para}) nos metais e que a mesma era independente da temperatura. O argumento básico utilizado por Pauli foi o de considerar um metal como um gás degenerado de elétrons que obedece à *estatística de Fermi-Dirac* (1926) (vide verbete nesta série). Ora, como o campo magnético tentava alinhar o spin de todos os elétrons em sua direção, então, mais de um elétron poderia ocupar cada estado de baixa energia. Isto, contudo, violaria o *princípio de exclusão* que ele próprio, Pauli, havia descoberto em 1925 (vide verbete nesta série). Para contornar essa dificuldade, considerou que somente elétrons pertencentes a uma fina camada da *superfície de Fermi* (SF) poderiam ser alinhados. Desse modo, a *suscetibilidade paramagnética* (χ_{para}) de um gás de elétrons livres obtida por Pauli, era a seguinte:

$$\chi_{para} = (e^2 k_F)/(4\pi^2 mc^2),$$

onde e e m representam, respectivamente, a carga e a massa do elétron, c a velocidade da luz no vácuo e k_F é o raio da SF, que é definido pelos vetores \vec{k} para os quais a *energia de Fermi* (ϵ_F) é constante. Por sua vez, ϵ_F significa a energia mais alta, em que no zero absoluto ($T = 0$ K), o elétron pode ocupar em sua distribuição orbital. [Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley and Sons, 1971); John Michael Ziman, *Principles of the Theory of Solids* (Cambridge University Press, 1972)].

De posse desse valor teórico para χ_{para} , Pauli comparou-o com valores experimentais de alguns metais alcalinos [sódio (Na), potássio (K), rubídio (Rb) e césio (Cs)]. As diferenças encontradas pareciam indicar a presença de um fraco diamagnetismo. No entanto, no Rb e Cs, o diamagnetismo era comparável ao paramagnetismo. Porém, como vimos que Bohr (1911), Lorentz (1914) e van Leeuwen

(1919) haviam demonstrado que os elétrons de condução não contribuíam ao diamagnetismo, Pauli não considerou a hipótese de que esses elétrons pudessem explicar as anomalias *diamagnéticas* observadas experimentalmente.

As propriedades magnéticas (dia, paramagnetismo) e as dificuldades apontadas acima das mesmas, começaram a ser entendidas com o desenvolvimento Mecânica Quântica, a partir de 1925 (sobre esse desenvolvimento, ver verbetes nesta série). Com efeito, em 1927 (*Nature* 20, p. 30), o físico norte-americano John Hasbrouck van Vleck (1899-1980; PNF, 1977) fez um estudo geral sobre a *suscetibilidade magnética* (χ) de moléculas [em particular, trabalhou com a molécula de protóxido de nitrogênio (NO)], estudo no qual usou a teoria quântica perturbativa em segunda ordem, e obteve o seguinte resultado:

$$\chi = - (e^2 N / 6mc^2) \sum \bar{r}^2 + 2N \sum | \langle s | \mu_z | 0 \rangle |^2 / (E_s - E_0),$$

onde N é o *número de Avogadro*, \bar{r}^2 significa a média quadrática da distância r do elétron a um ponto central (hoje, núcleo atômico rutherfordiano), projetada em um plano perpendicular ao vetor campo magnético (\vec{H}), $\langle s | \mu_z | 0 \rangle$ é o elemento de matriz da componente z do *momento magnético orbital* $\vec{\mu}$, conectando o estado fundamental $\langle 0 |$ ao estado excitado $\langle s |$, com E_0 e E_s seus respectivos estados de energia. Desse modo, o material será diamagnético ($\chi < 0$) ou paramagnético ($\chi > 0$) se o segundo termo da expressão acima – chamado *paramagnetismo de van Vleck* – for menor ou maior do que o primeiro.

Uma nova tentativa de explicar o diamagnetismo nos metais por intermédio da Mecânica Quântica foi apresentada, em 1930 (*Proceedings of the National Academy of Sciences* 16, p. 95), pelo físico norte-americano Francis Bitter (1902-1967) ao calcular o valor esperado da *fórmula de Langevin-Pauli*, aplicando as funções de onda schrödingerianas (vide verbete nesta série) do elétron livre e estendida a uma célula unitária. Porém, esse resultado diferia cerca de duas vezes o valor conhecido. O estudo quanto-mecânico completo de elétrons orbitais e livres em um campo magnético foi realizado pelo físico russo Lev Davidovich Landau (1908-1968; PNF, 1962), ainda em 1930 (*Zeitschrift für Physik* 64, p. 629), em seu célebre trabalho sobre o diamagnetismo. Com efeito, ao aplicar a *estatística de Fermi-Dirac* a um gás de elétrons (sem spin) degenerado em um campo magnético externo, Landau

demonstrou que a χ_{dia} desse gás vale exatamente – (1/3) χ_{para} obtida por Pauli para elétrons com spin, ao invés do valor nulo previsto pela Física Clássica, conforme vimos acima. Além disso, Pauli demonstrou, também, que o momento de *dipolo diamagnético* (μ_{dia}) apresentava uma forte periodicidade, sob a ação do campo magnético externo, resultado esse que logo seria observado no chamado *efeito de*

Haas-van Alphen. Apesar desses importantes resultados obtidos por Landau, a questão da alta χ_{dia} do bismuto (Bi) permanecia ainda um mistério sem solução. É oportuno destacar que o efeito referido acima foi registrado pelos físicos holandeses Wander Johannes de Haas (1878-1960) e seu aluno R. M. van Alphen, no final de 1930 (*Communications of the Karmeligh Onnes Laboratory* 212A, p. 1106). Esses físicos usaram cristais de bismuto (Bi), que haviam sido crescidos pelo físico russo Lev Vasilevich Shubnikov (1901-1937) enquanto trabalhava com de Haas, na *Universidade de Leiden*, entre 1926 e 1929. Nessa ocasião, de Haas e Shubnikov, observaram, pela primeira vez, a mudança periódica da resistividade do Bi como função do campo magnético e em baixas temperaturas. Em virtude disso, esse efeito físico é também conhecido como *efeito de Haas-van Alphen-Shubnikov*. Note que, em 1931 (*Zeitschrift für Physik* 67, p. 311), o físico húngaro-norte-americano Edward Teller (1908-2003) também estudou o diamagnetismo de elétrons livres sob o ponto de vista quanto-mecânico. (L. Hoddeson, G. Baym and M. Eckert, *Reviews of Modern Physics* 59, p. 287; Ziman, op. cit).

O *modelo de Landau* do diamagnetismo foi retomado pelo físico inglês Rudolf Ernst Peierls (1907-1995), em trabalhos realizados em 1932 (*Zeitschrift für Physik* 33, p. 864) e 1933 (*Zeitschrift für Physik* 80; 81, p. 763; 186), nos quais tratou o problema de elétrons livres em campos magnéticos fracos e fortes, respectivamente. No caso do campo fraco, ele o tratou como uma perturbação e, com isso, demonstrou que χ_{dia} se relacionava com a energia-momentum E (k) do elétron na *superfície de Fermi*, fato que, em certas situações (grande curvatura da superfície), elevou χ_{dia} , como ocorre, por exemplo, com o Bi. Em seu trabalho sobre campos magnéticos fortes, atuando em elétrons de condução, Peierls deu uma explicação teórica para o *efeito de Haas-van Alphen-Shubnikov*.

Vejamos agora o tratamento quanto-mecânico do ferromagnetismo. Em 1920 (*Zeitschrift für Physik* 21, p. 613), o físico alemão Wilhelm Lenz (1888-1957) iniciou o estudo de um modelo teórico para

um sistema magnético e, então, propôs o desenvolvimento desse estudo como assunto de Tese de Doutorado ao seu estudante, o também físico alemão Ernst Ising (1900-1998). Essa tese foi por ele resumida em um artigo publicado em 1925 (*Zeitschrift für Physik* 31, p. 253), e que passou a ser conhecido desde então como o *modelo de Ising*. Nesse modelo, para superar as dificuldades do *modelo de Weiss* para explicar o ferromagnetismo, apontadas acima, Ising supôs que os momentos magnéticos colocados sobre os sítios equidistantes e em uma cadeia unidimensional, interagem com seus vizinhos mais próximos, de modo que a energia potencial era mínima quando os dipolos interagentes apontavam em uma mesma direção, e máxima quando apontassem em direção oposta, não sendo, no entanto, permitidas outras orientações. Não obstante Ising haver calculado exatamente a função partição (Z) de seu modelo e, conseqüentemente, estudado a sua Mecânica Estatística, a cadeia linear considerada por ele não apresentava ordem de longo alcance em qualquer temperatura diferente do zero absoluto (0 K). Em vista disso, o *modelo de Ising* não explicava a razão de ser alto o H_m -proposto por Weiss e, portanto, o ferromagnetismo permanecia sem explicação.

Uma nova tentativa para explicar o *ferromagnetismo* deve-se ao físico alemão Werner Karl Heisenberg (1901-1976; PNF, 1933) ao desenvolver, em 1928 (*Zeitschrift für Physik* 49, p. 619), um modelo no qual explicava que, a razão de ser alto o H_m , decorria do fato de ele ter origem eletromagnética. Assim, usando uma combinação do *princípio da exclusão de Pauli* e a superposição de funções de onda schrödingerianas, ele mostrou que os elétrons de mesmo spin tenderiam a permanecer afastados, minimizando a sua energia com uma baixa repulsão coulombiana. Por outro lado, elétrons de spins diferentes poderiam se aproximar mais e teriam, portanto, uma energia potencial mais elevada. Dessa forma, a *substância ferromagnética* apresentaria uma tendência natural de manter os spins eletrônicos alinhados e com mínima energia. Portanto, de acordo com esse *modelo de Heisenberg*, o forte alinhamento dos spins (característica do ferromagnetismo) decorria de uma energia de troca (“exchange”) entre o spin de um elétron e seus vizinhos mais próximos (um mínimo de oito).

É oportuno observar que Heisenberg já havia esboçado seu modelo desde 1926, porém, ele tinha dificuldade em calcular a energia de um sistema de muitos spins em termos da interação de troca, pois não conhecia ainda a Teoria de Grupos, importante para a realização desse cálculo. Nesse meio tempo, os físicos, o húngaro-norte-americano Eugene Paul Wigner (1902-1995; PNF, 1963), e os alemães Walther Heitler (1904-1981), Fritz Wolfgang London (1900-1954) e Friedrich Hermann Hund (1896-1997), além do matemático alemão Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955), independentemente, utilizaram aquela Teoria (em especial a representação do Grupo de Permutações) em seus trabalhos sobre espectros atômicos e moleculares. Por exemplo, Heitler e London apresentaram, pela primeira vez, em 1927 (*Zeitschrift für Physik* 44, p. 455), a teoria das ligações químicas de átomos idênticos, na qual consideraram a troca de elétrons de valência (vide verbete nesta série) entre dois átomos quaisquer de uma rede (“lattice”). Desse modo, usando a *integral de troca de Heitler-London*, Heisenberg calculou, no citado trabalho de 1928, a energia de troca que tende a alinhar os spins, usando, para isso, os caracteres do Grupo de Representações e, também, a distribuição gaussiana para incluir as flutuações nos níveis de energia eletrônicos. [Sobre a Teoria de Grupos, ver: Hermann Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (E. P. Dutton and Company, Inc., 1952); Eugene Paul Wigner, *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Academic Press, 1959); José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, *Teoria de Grupos* (Livraria da Física, 2009)].

Em 1929 (*Proceedings of the Royal Society of London* A123, p. 714), o físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933) obteve a hoje célebre *hamiltoniana do ferromagnetismo*:

$$H_{\text{ferro}} = \sum J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j,$$

onde J_{ij} é a *matriz integral de troca* (cuja forma pode ser vista em Ziman, op. cit.) e $\vec{S}_{i(j)}$ é o operador de spin total do átomo $i(j)$ da rede. Note que foi também nesse artigo que Dirac apresentou as famosas funções de onda antissimétricas, na forma de um determinante, para representar um sistema de muitos-elétrons. Registre que, também em 1929 (*Physical Review* 34, p. 1293), o físico norte-americano John Clarke Slater (1900-1976), desenvolveu uma nova técnica matemática semelhante a essa de Dirac, porém incluindo os spins orbitais dos elétrons, e que ficou conhecida como *determinante de Slater*. Esse *modelo de Slater* era muito mais simples do que os modelos de Wigner (1926) e de Weyl (1928) vistos acima, que usavam Teoria de Grupos.

Ainda em 1929 (*Zeitschrift für Physik* 57, p. 545), o físico norte-americano Felix Bloch (1905-1983; PNF, 1952) começou a estudar o papel dos elétrons de condução no fenômeno do ferromagnetismo, pois pretendia evitar a distribuição gaussiana usada por Heisenberg em seu modelo.

Desse modo, calculou a energia de troca entre elétrons livres de um gás, porém, descobriu que somente para baixas densidades eletrônicas (muito baixa para os alcalinos), a interação de troca atrativa proposta por Heisenberg, entre os elétrons, domina a energia do ponto zero entre os mesmos, domínio esse necessário para produzir o estado *ferromagnético*. Contudo, observou Bloch, a própria energia do ponto zero deve ser levada em consideração para o estado *ferromagnético* de um metal. (Hoddeson, Baym and Eckert, op. cit.).

No prosseguimento de seu estudo do ferromagnetismo, Bloch passou a tratá-lo na região de baixas temperaturas, já que, nelas o *modelo de Weiss* e o *modelo de Heisenberg* falhavam. Portanto, substituindo a Teoria de Grupos usada por Heisenberg pelos *determinantes de Slater*, Bloch descobriu, em 1930 (*Leipziger Vorträge: Elektronen-Interferenzen*, p. 67) as famosas *ondas de spin (magnons)*, que são estados de energia correspondente à precessão dos spins alinhados no estado fundamental. Ao calcular os autovalores desses estados de energia, Bloch demonstrou que as flutuações decorrentes das ondas de spin a baixas temperaturas, em redes uni e bidimensionais, destroem a possibilidade do ferromagnetismo, enquanto que em três dimensões, a variação da magnetização (ΔM) é proporcional à $T^{3/2}$, isto é: $\Delta M/M(0) \propto T^{3/2}$. Esse resultado ficou conhecido como a *lei de Bloch* $T^{3/2}$, além de ser compatível com valores experimentais então conhecidos, mostrava que, no estado *ferromagnético*, é importante não só o número de vizinhos mais próximos (de um dado spin), mas sim seus próprios arranjos espaciais. Note que Slater, ainda em 1930 (*Physical Review* 35, p. 250), chegou aos *magnons* trabalhando com elétrons metálicos. Porém, foi Bloch que usou tais *quanta* para explicar o ferromagnetismo. [Antonio Gomes de Oliveira, Suscetibilidade Paralela de Magnons, *Tese de Mestrado* (DFUPC/RJ, 1970); Kittel, op. cit.; Ziman, op. cit.].

Os trabalhos de Heisenberg, Bloch e Slater citados acima foram sumarizados por Pauli, no *Congresso Solvay*, ocorrido em outubro de 1930. Dentre as dificuldades encontradas nesses trabalhos, Pauli apontou a solução do *modelo de Heisenberg* como sendo uma delas. Chegou inclusive a afirmar que uma extensão do *modelo de Ising* em uma rede tridimensional, poderia explicar o ferromagnetismo. Uma tentativa de resolver esse modelo, por intermédio do cálculo das autofunções do estado *ferromagnético*, foi empreendida pelo físico germano-norte-americano Hans Albrecht Bethe (1906-2005; PNF, 1967). Assim, em 1931 (*Zeitschrift für Physik* 71, p. 205), analisou o caso de uma cadeia unidimensional de spins com interação de troca J , positiva, como no caso do *ferromagnetismo de Heisenberg*, ou negativa no caso “normal”, relevante para o processo de coesão de elétrons. Nesse trabalho, Bethe calculou a função de onda de estados com um número arbitrário de spins opostos. Esse cálculo (embora incompleto em muitos aspectos, pois não considerava, por exemplo, o caso de $J < 0$, referido acima), é notável já que ele é considerado a primeira solução exata de um sistema quântico de muitos-corpos em interação.

A solução correspondente a $J < 0$ foi encontrada pelo físico francês Louis Eugène Félix Néel (1904-2000; PNF, 1970), em 1932 (*Annales de Physique* 17, p. 64), ao formular um modelo de uma estrutura magnética para a qual os spins nas redes são arrançados, de um modo paralelo e antiparalelo, alternadamente, de maneira que o campo magnético resultante é nulo. Néel demonstrou ainda que esse estado – denominado por ele de antiferromagnetismo – desaparece acima de uma determinada temperatura, conhecida desde então como *temperatura de Néel*: $T_N = \mu C$, onde C , para o caso da aproximação de campo médio, se refere a uma subrede simples. Em 1938 (*Physical Review* 54, p. 79), Bitter apresentou um estudo sobre o antiferromagnetismo, no qual mostrou a condição para que os spins dos elétrons se alinhem antiparalelamente; tal estudo ficou conhecido como o *modelo de Bitter*. Note que, usando esse modelo, o físico norte-americano Charles Kittel (n.1916) estudou, em 1948 (*Physical Review* 73, p. 155), a *ressonância ferromagnética* (precessão de subredes magnetizantes em torno de um campo magnético interno). É oportuno destacar que, ainda em 1948 (*Annales de Physique* 3, p. 137), Néel descobriu um outro estado magnético – o ferrimagnetismo, como o chamou – no qual os spins nas redes são alinhados paralela e antiparalelamente, porém suas intensidades não são iguais, produzindo, dessa forma, um campo magnético resultante. Aos materiais que apresentam tal propriedade, chamou-os de *ferrites*. Note que a fórmula química usual de um *ferrite* é: $MO.Fe_3O_3$, onde o cátion divalente M pode ser um dos elementos químicos: zinco (Zn), cádmio (Cd), ferro (Fe), níquel (Ni), cobre (Cu), cobalto (Co) ou magnésio (Mg). Os *ferrites* são cristais que têm pequena condutividade elétrica comparada aos materiais *ferromagnéticos*, razão pela qual eles são usados em situações envolvendo altas frequências, porque esses materiais são imunes a correntes elétricas de fuga (“stray currents”). É interessante destacar que a *ressonância antiferromagnética* (precessão das duas subredes em direções opostas), que havia sido observado em 1950 (*Physical Review* 79, p. 542), por E. P. Trownson, D. F. Bleil, R. K. Wangness e L. R. Maxwell usando o óxido de cromo (Cr_2O_3), para o qual $T_N \sim 40^{\circ}C$, foi explicada em 1951, independentemente, por Kittel (*Physical Review* 82, p. 565) e T. Nagamiya

(*Progress in Theoretical Physics* 6, p. 342). Note que, em 1950 (*Physical Review* 78, p. 266), van Vleck apresentou uma teoria microscópica do ferromagnetismo e do antiferromagnetismo. Ainda em 1950 (*Physical Review* 79, p. 350; 705), o físico norte-americano Philip Warren Anderson (n.1923; PNF, 1977) calculou a relação entre T_N e a *temperatura de Debye*: $\theta_D = \hbar \omega / (2\pi k)$, onde \hbar é a *constante de Planck*, k a *constante de Boltzmann* e ω é a frequência com que as ondas sonoras viajam em um sólido. Em 1952 (*Physical Review* 86, p. 694), Anderson estudou a propagação de *magnons* em materiais *antiferromagnéticas*. [Robert Martin Eisberg and Robert Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles* (John Wiley and Sons, 1974); K. W. H. Stevens, *IN: Twentieth Century Physics 2* (Institute of Physics Publishing and American Institute of Physics Press, 1995); Kittel, op. cit.].

Apesar dessas descobertas de Néel, o problema do entendimento do ferromagnetismo continuava ainda como uma questão a ser resolvida. Com efeito, ainda em 1932 (*Zeitschrift für Physik* 74, p. 295), Bloch estudou a dinâmica do *modelo de Heisenberg* usando o formalismo da segunda quantização apresentado por Dirac, em 1927 (vide verbete nesta série). Ainda nesse artigo, Bloch estudou a largura de fronteiras que separam os *domínios* elementares em materiais magnéticos, as hoje famosas *paredes de Bloch*. Também em 1932 (*Physical Review* 41, p. 507), Bitter apresentou um novo método para investigar o comportamento de *domínios magnéticos* na superfície de substâncias *ferromagnéticas*. A estrutura desses *domínios* foi explicada, em 1935 (*Physikalisch Zeitschrift der Sowjetunion* 8, p. 153), pelos físicos russos Landau e Evgenil Mikhailovich Lifshitz (1915-1985). Segundo esses físicos, a estrutura de um *domínio* é uma consequência natural de varias contribuições à energia (de troca, anisotropia e magnética) de um corpo *ferromagnético*.

Na conclusão deste verbete, vejamos como foram feitas tentativas de estender o *modelo de Ising* para duas e três dimensões no sentido de aplicá-lo ao estudo do ferromagnetismo. Com efeito, em 1936 (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 32, p. 477), Peierls apresentou um argumento fenomenológico no qual sustentava que essa extensão deveria exibir magnetização em baixas temperaturas. O *modelo bidimensional de Ising* foi apresentado em 1941 (*Physical Review* 60, p. 252; 263), pelos físicos, o holandês Hendrik Anthony Kramers (1894-1952) e o suíço Gregory Hugh Wannier (1911-1983) que partiram da ideia de que a função partição (Z) desse modelo poderia ser escrita como o maior valor de uma determinada matriz e , com isso, conseguiram relacioná-la com baixas e altas temperaturas. Nesse trabalho, eles conseguiram calcular exatamente a temperatura Curie (T_C) de uma rede quadrada. Contudo, essa solução analítica não ficou completa por não conseguirem calcular o maior autovalor da referida matriz. Note que, também em 1941 (*Journal of Chemical Physics* 9, p. 706), o matemático norte-americano Elliot Waters Montroll (1916-1983) apresentou uma ideia semelhante a essa, que foi por ele desenvolvida em 1942 (*Journal of Chemical Physics* 10, p. 61).

Uma solução exata do *modelo bidimensional de Ising* foi encontrada pelo químico norueguês-norte-americano Lars Onsager (1903-1976; PNQ, 1968), em 1944 (*Physical Review* 65, p. 117), para uma rede quadrática simples, na ausência de um campo magnético externo. Mais tarde, em 1949 (*Physical Review* 76, p. 1232), B. Kaufman apresentou um novo estudo sobre o *modelo bidimensional de Ising*, porém ainda sem campo magnético externo. No entanto, o problema do *modelo tridimensional de Ising* continua ainda um problema em aberto, apesar de algumas soluções numéricas aproximadas já foram obtidas por intermédio do Grupo de Renormalização usada em Teoria Quântica de Campo (TQC), como, por exemplo, as de Aleksandr Morkowitsh Polyakov (n.1945), em 1968 [*Zhurnal Eksperimental'noi i Teoretiskoi Fiziki* 55, p. 1026 (*Soviet Physics – JETP* 28, p. 533)] e 1970 [*Zhurnal Eksperimental'noi i Teoretiskoi Fiziki* 59, p. 542 (*Soviet Physics – JETP* 32, p. 296, 1971)]. Nesses trabalhos, Polyakov mostrou que o *modelo de Ising tridimensional*, tem uma representação em termos de redes fermiônicas sem interação. Em dimensões próximas de quatro, o *modelo de Ising* não corresponde ao comportamento da TQC ϕ -4. Em dimensões mais altas, a transição de fase do *modelo de Ising* é descrita pelo campo médio da TQC.

Em 2000 (*Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing* ACM p. 87), Sorin Istrail mostrou que o cálculo computacional da energia livre de um subgráfico de um *modelo de Ising* para uma rede de três ou mais dimensões é computacionalmente intratável. Será que, com o desenvolvimento da computação quântica, o *modelo de Ising multidimensional* será computacionalmente tratável?. [en.wikipedia.org/wiki/Ising_model (acesso em 12/12/2009)].



ANTERIOR

SEGUINTE