CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

A Invenção da Trigonometria.

As primeiras ideias sobre uma "geometria social ou prática" são bem antigas, surgiram da necessidade dos povos antigos em lidar com números e relacioná-los aos problemas que tivessem alguma utilidade. Um dos mais antigos exemplos desse utilitarismo foi a preparação de uma Tabela (*Plimpton 322*), feita pelos babilônios, no período 1900-1600 a.C., e que, somente na Idade Média a mesma foi interpretada como representando o quadrado da secante de um arco A ($\sec^2$ A). É oportuno registrar que os babilônios, bem como os egípcios, não conheciam a medida moderna de um ângulo e, muito menos, o conceito de secante. Eles, no entanto, desenvolveram modos de medir os lados de um triângulo, ou seja, a "trilaterometria", mais tarde, no final do Século 16 d.C., denominada de trigonometria.

Foi somente na Grécia Antiga que se iniciou um estudo sistemático da relação entre ângulos (arcos) em um círculo e o comprimento das cordas que os subentendia. Esse estudo, por exemplo, permitiu que o astrônomo grego Aristarco de Samos (c.320-c.250) calculasse os tamanhos do Sol, Terra e Lua e suas respectivas distâncias, registrado em seu livro Sobre os Tamanhos e as Distâncias do Sol e da Lua, publicado por volta de 260 a.C. Registre-se que, para tais cálculos, Aristarco usou os conhecimentos geométricos dos gregos, o filósofo Tales de Mileto (624-546) e o matemático Euclides de Alexandria (c.323-c.285). Foi também por intermédio da "geometria social ou prática" que o astrônomo grego Eratóstenes de Cirena (c.276-c.196) mediu pela primeira vez o diâmetro da Terra, por volta de 240 a.C.

O trabalho incansável do astrônomo grego Hiparco de Nicéia (c.190-c.120) sobre os eclipses solares e lunares, levou-o a construir uma tabela de cordas (ligando dois pontos localizados em um círculo cujo raio tomou como sendo unitário). Com auxílio dessa tabela e a divisão do circulo de 360^0 [proposto pelo astrônomo grego Hypsicles de Alexandria (c.150 a.C.)] - com as subdivisões do diâmetro em 120 partes, com cada uma dessas partes dividida em 60 partes [hoje, minuto (')] e estas, também, divididas em 60 partes [hoje, segundo (")], conforme haviam considerado os babilônios dos últimos séculos a.C. -, Hiparco encontrou os seguintes valores, em função do raio terrestre (R_T): distância Terra-Sol ~ 2500 R_T; distância Terra-Lua ~ 60 R_T; raio do Sol ~ 12 R_T e raio da Lua ~ 0,29 R_T. Em virtude desse trabalho de Hiparco ele é considerado como o "pai" da trigonometria.

Esse trabalho "trigonométrico" de Hiparco foi completado pelo astrônomo grego Menelaus de Alexandria (f.c.100 d.C.), em seu livro Cordas em um Círculo. Por sua vez, o astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (85-165), divulgou e utilizou as tabelas de Hiparco em seus trabalhos em Astronomia e em Óptica; nesta, construiu uma tabela no qual registrava os ângulos de incidência e de refração de raios luminosos que atravessam superfícies de separação entre ar-água, ar-vidro e água-vidro, ângulos esses que eram medidos por um aparelho bem simples inventado por ele próprio. Os resultados dessas medidas foram anotados por Ptolomeu em seu livro **Óptica. [Lancelot Hogben, Maravilhas da Matemática (Editora Globo, 1952); Carl B. Boyer, A History of Mathematics (John Wiley and Sons, 1968); Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Oxford University Press, 1972)].**

Na Idade Média, uma das primeiras contribuições para o desenvolvimento da trigonometria deve-se ao astrônomo hindu Aryabhata I (476-c.550) ao adotar um raio de ~ 3439 unidades [$C = 2\pi r \to r \sim 360 \times 60/(2 \times 3{,}14)$] para calcular as semicordas dos arcos, mais tarde conhecidas como senos, como veremos mais adiante. Portanto, segundo essa adoção, por exemplo, vê-se que o seno de 30^0, considerado como a metade da corda do arco de 30^0, vale 1749 (hoje, 0,5). Registre que os hindus trabalhavam com o equivalente ao nosso cosseno, e eles consideravam o seno como o complemento do arco considerado para calcular o cosseno. (Kline, op. cit.).

Depois dos hindus, foram os árabes que deram novas contribuições ao estudo das funções trigonométricas. Com efeito, o astrônomo árabe Abu-´Abdullah Muhammad ibn Jabir al-Battani (Albatênio) (c.858-929) melhorou as tabelas astronômicas de Ptolomeu, substituindo os métodos geométricos dos gregos por *trigonométricos*, utilizando para isso (e de modo pioneiro) uma *tabela de*

senos, apresentada por ele em seu livro Kitab al-Zig ("Livro das Tabelas Astronômicas"). Já o astrônomo persa Abu al-Wafa´ (al-Buzajani) (940-948), que trabalhava no *Observatório de Bagdá*, elaborou novas tabelas astronômicas, utilizando a função tangente e sua inversa, a cotangente, já de uso regular pelos astrônomos árabes [por exemplo, o também médico e filósofo Thabit (Tâbit) ibn-Qo(u)rra (826/836-901) e Albatênio], bem como inventou as funções secante e cossecante para representar, respectivamente, o inverso do cosseno e do seno; ele também preparou uma tabela de senos e tangentes para cada dez minutos (10') de arco. Por outro lado, o astrônomo armênio Abu Ar-Rayan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni (973-c.1051) demonstrou a hoje conhecida *lei dos senos* nos triângulos planos:

Em um triângulo plano com ângulos A, B, C e os respectivos lados opostos a, b, c, tem-se: *a/sen A = b/sen B = c/ sen C*.

A sistematização da trigonometria plana e esférica foi realizada pelo astrônomo árabe Nasir ed-din at Tusi (Nâsir Eddin) (1201-1274) no livro intitulado Treatise on the Quadrilateral ("Tratado sobre o Quadrilátero"). Neste livro, ele deduziu as fórmulas fundamentais para resolver triângulos mais gerais, particularmente de triângulos esféricos retos, aqueles cujos três ângulos internos são perpendiculares. Note que esse livro só foi conhecido na Europa, em 1450, quando então foi traduzido. É interessante ressaltar que o matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1170-1230), em seu livro Pratica Geometriae ("Geometria Prática"), publicado em 1220, divulgou a *tabela de senos* usada pelos gregos e romanos, por intermédio de algarismos arábicos.

Antes de prosseguir, creio ser oportuno registrar como surgiu a palavra seno. Os astrônomos hindus, conforme vimos acima, trabalhavam com a semicorda dos arcos, cuja expressão em hindu (*jiva*) foi traduzida pelos árabes como *jiba*. Contudo, existe em árabe a palavra *jaib*, que significa "golfo" ou "enseada". Portanto, quando o linguista inglês Robert of Chester (f.c.1150), já em 1145, traduziu os textos árabes, confundiu *jiba* com *jaib*, e deu-lhe, desse modo, o correspondente nome latino: *sinus* (seno). [Paul Karlson, A Magia dos Números (Editora Globo, 1961); Boyer, op. cit.].

Novas contribuições à trigonometria foram dadas por astrônomos europeus. Com efeito, o austríaco George von Puerbach (1423-1461) corrigiu as famosas *tabelas alfonsinas* [mandadas preparar pelo Rei espanhol Alfonso X de Castela e Leão (1221-1284), em 1252, para descrever o movimento dos astros] usando uma tabela de *senos naturais*, ao invés de cordas, senos esses calculados com a diferença de dez minutos (10'). Entre 1462 e 1463, o astrônomo e matemático alemão Johannes (Johann Müller von Königsberg) Montaregio (Regiomontanus/no) (1436-1476), escreveu o tratado intitulado De triangulis omnimodis ("Sobre os triângulos de todas as espécies"), composto de quatro livros, nos quais apresentou a *lei dos senos* para triângulos planos (vista acima) e esféricos, esta dada pela expressão:

sen a/sen A = sen b/sen B = sen c/sen C.

Ele também deduziu a *lei dos cossenos* para triângulos planos e esféricos, respectivamente:

$$\cos A = (c^2 + b^2 - a^2)/(2bc); \quad \cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A.$$

Observe que nos triângulos esféricos, os lados (a, b, c) são arcos de círculo e, portanto, são dados também em unidades de ângulo [grau (0), minuto (') e segundo (")]. É oportuno destacar que Regiomontano, para construir sua *tabela de senos*, usou raios em unidades de 6×10^5, 10^8 e 6×10^8. Contudo, para sua *tabela de tangentes* (que ele apenas chamava de "tabela de números") e apresentada no livro Tabulae Directionum ("Tabelas Dirigidas"), escrito entre 1464-1467 e publicado em 1490, ele usou raios em unidades de 10^5. Observe que, como o livro de Regiomontano só foi publicado em 1533, nesse meio tempo, o astrônomo e matemático alemão Johannes Werner (1468-1522/1528) melhorou e publicou as ideias de Regiomontano no livro intitulado De Triangulis Sphaericis ("Sobre os Triângulos Esféricos), em 1514.

Uma mudança conceitual do seno foi proposta pelo matemático e astrônomo austríaco Georg Joachim von Lauchen (Rhaeticus/Rético) (1514-1576), ao considerar que para um arco OAD, o segmento AB (perpendicular baixada de A ao raio OD) representa o seno do ângulo AÔB do triângulo OAB. Contudo, ele ainda, como os gregos, hindus e árabes, preparou uma *tabela de senos* baseada em raios de várias unidades: 10^{10} e 10^{15}, e para cada dez segundos (10") de arco.

Por sua vez, o advogado e matemático francês François Viète (1540-1603) em seu livro Canon Mathematics ("A Medida da Matemática"), publicado em 1579, demonstrou a *lei das tangentes*:

$$(a - b)/(a + b) = [tg\ (1/2)(A – B)]/tg\ [(1/2)(A + B)].$$

Além disso, ainda nesse livro, ele apresentou várias identidades conhecidas desde Ptolomeu (p.e.: $sen^2 A + cos^2 B = 1$), deduziu outras, dentre elas:

$$sen\ A – sen\ B = 2\ cos\ [(A + B)/2]\ sen\ [(A - B)/2].$$

Também é de Viète, a dedução de identidades para sen ($n\theta$) e cos ($n\theta$), em função de sen (θ) e cos (θ), porém, elas só ficaram conhecidas quando seu livro Sectiones Angulares ("Secções Angulares"), foi postumamente publicado, em 1615.

Note que o nome trigonometria foi cunhado por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), em 1595, em um pequeno artigo que tratava de triângulos esféricos. Ele repetiu esse termo em trabalhos publicados em 1600, 1606 e, finalmente, em 1613, no livro denominado Thesaurus ("Tesouro"), no qual corrigiu e publicou uma segunda *tabela de Rético*.

Por fim, o físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) no tratado chamado Introductio in Analysin Infinitorum ("Introdução à Análise do Infinito"), de 1748, introduziu os senos e tangentes sem dimensões, ou seja, ele considerou o raio da circunferência como unitário. [D. J. Struik (Editor), A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (Harvard University Press, 1969)]. É importante notar que Euler, em trabalhos realizados em 1734-1735 e publicados em 1740, reobteve a fórmula deduzida pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754), em 1707, qual seja:

$$(cos\ x + \sqrt{-1}\,sen\ x)^n = cos\ (nx) + \sqrt{-1}\ sen\ (nx),$$

Mais tarde, Euler publicou os livros Institutiones Calculi Differentialis ("Livros sobre o Cálculo Diferencial"), publicada em Berlim, em 1755, e Institutiones Calculi Integralis ("Livros sobre o Cálculo Integral"), obra em três volumes, publicada em São Petersburgo, de 1768 a 1770, nos quais conceituou a noção de função – denotada por f (x) – e encontrou a relação entre as funções trigonométricas e exponenciais, por intermédio da hoje famosa *equação de Euler*:

$$exp\ (\pm i\ x) = cos\ (x)\ \pm\ i\ sen\ (x),$$

onde i = $\sqrt{-1}$. Para isso, Euler usou as representações em série, obtidas a partir da famosa *fórmula de Taylor*, encontrada pelo matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), no livro intitulado Methodus Incrementorum Directa et Inversa ("Métodos Direto e Inverso de Incrementações"), publicado em 1715. Desse modo, Euler escreveu:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!\ ;\quad sen\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!\ ;\quad cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} / (2k)!\ .$$

Registre-se que a notação i = $\sqrt{-1}$ foi inventada por Euler, em 1777, no manuscrito intitulado De Formulis Differentialis Angularibus ("Das Fórmulas Diferenciáveis Angulares"), uma vez que o símbolo i era usado para denotar "número infinito", como se pode ver na expressão, que Euler utilizara antes:

$$e^x = (1 + x/i)^i\ ,$$

que significava (na notação de hoje):

$$e^x = \lim_{k \to \infty} (1 + x/h)^h\ .$$
