CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

A Análise Dimensional e a Cor do Céu.

A importância da Análise Dimensional, ou seja, a coerência de unidades físicas em uma expressão analítica representando determinada situação física foi considerada pelo matemático francês Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), em seu importante livro intitulado Théorie Analytique de la Chaleur ("Teoria Analítica do Calor"), publicado em 1822, no qual estudou a *condução do calor* em um sólido homogêneo e isotrópico, por intermédio de uma equação diferencial, conhecida hoje como *equação de Fourier*. Neste livro, pela primeira vez, uma equação foi examinada sob o ponto de vista da consistência das unidades físicas das grandezas envolvidas nelas. Assim, Fourier pode ser considerado o fundador da Análise Dimensional. [Ver a Seção IX do livro citado acima, em sua versão inglesa: Jean-Baptiste-Joseph Fourier, Analytical Theory of Heat, *IN*: *Great Books of the Western World* 45 (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1971)].

A *dimensionalidade* de uma variável física não é a mesma que a unidade pela qual ela é representada. Por *dimensionalidade*, descrevemos como uma variável é constituída em termos de suas dimensões básicas: *comprimento* (L), *massa* (M) e *tempo* (T). Por exemplo, a força (massa x aceleração = massa $\times$ comprimento $\times$ tempo^{-2}) é representada pela seguinte equação dimensional: $F = L\ M\ T^{-2}$. A Análise Dimensional também permite verificar a *dimensionalidade* de uma dada equação física. Com efeito, vejamos se a equação da velocidade (comprimento $\times$ tempo^{-1}) no movimento com aceleração (a) constante, representada por $v_f^2 = v_i^2 + 2\ a\ x$, onde v_f e v_i significam, respectivamente, a velocidade final e a velocidade inicial, e x significa o espaço percorrido, está dimensionalmente correta. Usando o que vimos acima, temos:

$$(LT^{-1})^2 = (LT^{-1})^2 + 2\ (LT^{-2})\ (L) \quad \rightarrow \quad L^2 = L^2 + 2\ L^2,$$

ou seja: ambos os termos da equação envolvem (comprimento)^2. Note que a AD só permite verificar a dimensionalidade, daí a razão pela qual a igualdade acima não valer algebricamente.

A Análise Dimensional (AD) também permite calcular a *dimensionalidade* de uma dada variável física. Por exemplo, queremos saber qual a expressão dimensional que representa a velocidade (v) de um pulso em um meio de densidade linear (massa/comprimento: μ), sabendo-se que a mesma é proporcional à força aplicada (F) e a μ. Usando a técnica da AD, vista acima, temos [Clifford E. Swartz, Phenomenal Physics (John and Wiley and Sons, Inc., 1981)]:

$$v \propto F^a\ \mu^b \rightarrow (LT^{-1}) = (L^1 M^0\ T^{-1}) = (L\ M\ T^{-2})^a\ (ML^{-1})^b = L^{a-b}\ M^{a+b}\ T^{-2a} \rightarrow$$

$$1 = a - b,\quad a + b = 0,\quad -1 = -2\ a \rightarrow a = ½\ \text{e}\ b = -½ \rightarrow v \propto \sqrt{F/\mu}.$$

Note que, em Acústica, a expressão correta é: $v = K\ \sqrt{F/\mu}$, onde K é uma constante matemática.

O resultado acima nos mostra que a AD só permite verificar a dimensionalidade de uma expressão física, conforme destacamos acima. Contudo, ela foi útil para o físico inglês John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919; PNF, 1904), em 1871 (*Philosophical Magazine* 41, p. 107), mostrar que a amplitude da luz solar (de frequência ν) espalhada pela atmosfera terrestre é proporcional à ν^4 e, com isso, explicou a razão ser azul (ν alto) o céu, e de ser vermelho (ν baixo) o por e o nascer do Sol. [John Strong, Concepts of Classical Optics (W. H. Freeman and Company, 1958)].
