CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

Entropia, Caos (Clássico e Quântico) e Fractais.

Em verbete desta série, vimos que, em 1865, o físico alemão Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822-1888) estudou a transformação de trabalho em calor em um ciclo fechado qualquer. Ao considerar esse ciclo como constituído de uma sucessão de *ciclos infinitesimais de Carnot* [constituído de duas transformações adiabáticas (troca de calor – ΔQ - constante) e duas transformações isotérmicas (temperatura absoluta - T - constante), proposto pelo físico francês Nicolas Sadi Carnot (1796-1832), em 1824], Clausius demonstrou seu célebre teorema:

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \ldots + \frac{\Delta Q_i}{T_i} + \ldots = \oint \frac{\delta Q}{T} = \oint dS \leq 0 ,$$

onde o sinal de menor (<) ocorre para as transformações irreversíveis e o sinal de igualdade (=), para as reversíveis. Ainda nesse trabalho, Clausius resumiu as Leis da Termodinâmica nas expressões: *Primeira Lei da Termodinâmica – A energia* (E) *do Universo é constante*; *Segunda Lei da Termodinâmica – A entropia* (S) *do Universo tende para um máximo*.

Um ano depois do *Teorema de Clausius*, isto é, em 1866, a *Segunda Lei da Termodinâmica* foi tratada pelo físico austríaco Ludwig Edward Boltzmann (1844-1906), ao formular um modelo mecânico no qual considerou que as partículas de um gás se moviam em órbitas periódicas e, com isso, deduziu uma expressão analítica para a entropia que dependia do período das partículas em suas órbitas, e que aumentava com o tempo. Contudo, esse modelo de Boltzmann foi muito criticado, inclusive por Clausius. Em vista disso, em 1868, Boltzmann apresentou um novo tratamento (ainda mecânico) para a entropia ao admitir que em um gás ideal, composto de um grande número (N) de moléculas, as interações entre elas poderiam ser negligenciadas. Isso significava considerar que as colisões entre as moléculas eram binárias e supor que suas velocidades são não-correlacionadas [hipótese essa conhecida como caos molecular ("Stosszahlansatz")]. [Ryogo Kubo, Statistical Mechanics (North-Holland Publishing, 1971)].

Ainda considerando que o calor tinha uma base mecânica, entre 1868 e 1872, Boltzmann realizou vários trabalhos usando essa visão mecânica. Nesses trabalhos, além de encontrar uma nova expressão analítica para S, ele definiu, em 1871 (*Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien* 63, p. 397) e 1872 (*Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien* 66, p. 275), a função $H(t) = \iiint f(\vec{v},t) \log f(\vec{v}, t)\, d^3\vec{v}$, que satisfaz à equação $dH/dt \leq 0$ – o célebre *teorema de transporte de Boltzmann* ou *teorema H de Boltzmann* – cujo principal resultado é o de que a entropia cresce nos processos irreversíveis. Note que $f(\vec{v}, t)\, d^3\vec{v}$ representa o número de moléculas que tem a velocidade ($\vec{v}$) entre $\vec{v}$ e $\vec{v} + d\vec{v}$. [Sílvio Roberto de Azevedo Salinas, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*

3, p. 28 (CLEHC/UNICAMP, 1982); Kerson Huang, Statistical Mechanics (John Wiley and Sons, Incorporation, 1963); Kubo, op. cit.].

A partir desses trabalhos mecânicos sobre a entropia, Boltzmann passou a considerar o raciocínio probabilístico, em trabalhos que publicou em 1877. Nesses trabalhos, assumiu que todos os *microestados* [aos quais denominou de *complexions* (configurações)] têm a mesma probabilidade P. Além disso, chamou de *macroestado* ao estado no qual uma molécula específica tem energia ε_r. Desse modo, concluiu que a P_r de um *macroestado* é proporcional ao número de *microestados* nos quais a energia remanescente (E - ε_r) é distribuída entre as N - 1 moléculas restantes, isto é: $P_r \propto \exp(-\varepsilon_r / kT)$. Boltzmann considerou, então, o número W (inicial da palavra alemã *Wahrscheinlichkeit*, que significa probabilidade) de *complexions* distintas de um *macroestado* envolvendo suas N ($N = n_0 + n_1 + n_2 + ...$) moléculas, onde n_0 representa o número de moléculas com energia 0ε, n_1 representa o número de moléculas com energia 1ε, n_2 representa o número de moléculas com energia 2ε, n_3 com energia 3ε, ... e n_r com energia rε, onde ε é uma constante positiva e rε < E e, pelo princípio da conservação do número de partículas e da energia, deveremos ter: $N = \sum_{i=o}^{r} n_i$ e $E = \sum_{i=o}^{r} i n_i \varepsilon$.

Para calcular W, Boltzmann usou o raciocínio combinatório, ou seja, considerou que: $W(n_0, n_1, n_2, ...) = N!/(n_0!\, n_1!\, n_2! ...)$ e, desse modo, usando a hipótese das probabilidades iguais, escreveu que a probabilidade $P(n_0, n_1, n_2, ...)$ de ocorrência de uma configuração pertencente ao conjunto definido pelos “números de ocupação” $(n_0, n_1, n_2, ...)$ é dado por: P = C W, onde C é uma constante. Ora, como a entropia do sistema considerado é igual a soma das entropias de seus componentes, como as probabilidades das *complexions* do mesmo sistema devem ser multiplicadas, e considerando que o logaritmo do produto de números é igual a soma dos logaritmos dos fatores, é fácil ver como Boltzmann chegou à sua célebre expressão da entropia:

$$S = k \,\ell og\, W ,$$

onde k é uma constante. É oportuno observar que, embora essa expressão esteja gravada no túmulo de Boltzmann, no *Cemitério Central* de Viena, ela só foi escrita dessa maneira pelo físico alemão Max Karl Ernst Planck (1858-1947; PNF, 1918) que, por sua vez, introduziu a notação k, denominada por ele de *constante de Boltzmann*, pela primeira vez em sua célebre fórmula de 1900, sobre a distribuição de equilíbrio térmico da radiação (de freqüência ν) do corpo negro, que considera a energia quantizada, ou seja: ε = h ν, sendo h a *constante de Planck*. [Abraham Pais, ´Subtle is the Lord...´- The Science and the Life of Albert Einstein (Oxford University Press, 1982)].

Uma nova ideia de caos surgiu no estudo do movimento planetário. Com efeito, em 1877-1878, o matemático norte-americano George William Hill (1838-1914) estudou o movimento da Lua levando em consideração a ação de outros planetas do sistema solar. Por intermédio de uma *equação diferencial ordinária não-linear* (EDON-L) - a hoje *equação de Hill*: $d^2x/dt^2 + \theta(t)\, x = 0$, sendo θ(t) uma função par de período π - ele demonstrou que o movimento do perigeu da Lua era periódico. Apesar de esse estudo ser publicado na revista *American Journal of Mathematics* 1, p. 5; 129; 245 (1878), ele não foi aceito pela comunidade científica e, às vezes, até ridicularizado. Contudo, essas críticas cessaram quando o matemático e filósofo francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), a partir de 1881, passou a estudar as EDON-L da forma geral: dy/dx = P (x, y)/Q (x, y), onde P e Q são polinômios arbitrários. Por exemplo, em 1885 (*Bulletin de la Société Mathématique de France* 13, p. 19) e 1886 (*Bulletin de la Société Mathématique de France* 14, p. 77), Poincaré demonstrou a convergência da solução em série que Hill encontrara para resolver sua equação. Note que a primeira das EDON-L foi encontrada, em 1724 (*Acta Eruditorum, Supplement* VIII, p. 66), pelo matemático italiano Jacopo Francisco, Conde Riccati de Veneza (1676-1754) ao estudar um problema de Acústica. A partir de 1763, ela ficou conhecida como *equação de Riccati*: $dy/dx = A(x) + B(y)\, y + C(x)\, y^2$, depois que o matemático francês Jean le Rond d´Alembert (1717-1783) passou a chamar aquela equação.

Mais tarde, em 1890 (*Acta Mathematica* 13, p. 1), ao estudar a estabilidade dos sistemas mecânicos (principalmente o problema de três corpos do sistema planetário), Poincaré demonstrou seu famoso Teorema do Retorno:

Qualquer sistema de partículas, com forças de interação que dependem apenas das posições (r)*, sempre retorna, depois de grandes períodos de tempo* (t)*, a uma vizinhança arbitrariamente próxima das suas condições de partida*.

Esse teorema e mais o estudo da estabilidade do sistema solar [este realizado entre 1892 e 1899 e apresentado nos livros intitulados Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste ("Novos Métodos da Mecânica Celeste") e Leçons de Mécanique Celeste ("Lições de Mecânica Celeste")] foram os que levaram Poincaré [seguidos de outros matemáticos como, por exemplo, o russo Aleksandr Mikhailovich Lyapounoff (Lyapunov) (1857-1918), em sua Tese de Doutorado intitulada Obshxhaya zadacha ob ustoychivosti dvizhenia ("Problema geral da estabilidade do movimento") defendida, em 1892, na *Universidade de Moscou*, e o sueco Ivar Bendixson (1861-1935), em 1901 (*Acta Mathematica* 24, p. 1)] a descobrir que os movimentos dos corpos são extraordinariamente sensíveis ao estado inicial do sistema físico; essa sensibilidade foi posteriormente chamada de caos clássico determinístico. Note que Poincaré usou argumentos geométricos e topológicos, enquanto Lyapunov lançou mão de argumentos analíticos. [Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Oxford University Press, 1972)].

Uma outra descoberta sobre a sensibilidade do estado inicial de um sistema físico foi a do meteorologista norte-americano Edward Norton Lorenz (1917-2008), do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), em 1960, ao começar seu estudo sobre a possibilidade de prever, por meio de um modelo matemático, a evolução das condições do clima. Assim, em 1963 (*Journal of the Atmosphere Sciences* 20, p. 130; *Proceedings of the New York Academy of Sciences* 1125, p. 130), Lorenz usou as *equações de Saltzman* [uma série de sete equações, encontradas pelo matemático norte-americano Barry Saltzman, em 1962 (*Journal of the Atmosphere Sciences* 19, p. 329), para estudar a convecção de fluidos com comportamento periódico] e constatou que movimentos intrinsecamente *caóticos* podem ocorrer em sistemas determinísticos dissipativos. É oportuno registrar que essa sensibilidade foi traduzida como o *efeito borboleta*, em decorrência de um artigo apresentado (e nunca publicado) por Lorenz, em 29 de dezembro de 1972, na *Associação Americana para o Progresso da Ciência*, realizado em Washington, D.C., e de nome Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?. Mais tarde, em 1982 (*Tellus* 34, p. 505), Lorenz descreveu experiências sobre a previsibilidade atmosférica. Para maiores detalhes sobre o trabalho de Lorenz em mudança de clima ver seu livro: Edward Norton Lorenz, A Essência do Caos (EdUnB, 1996).

Um outro aspecto do caos clássico determinístico decorre do trabalho do matemático franco-polonês Benoit B. Mandelbrot (n.1924) sobre uma nova forma de geometria. Com efeito, desde 1962, Mandelbrot começou a desenvolver uma geometria capaz de descrever, com precisão, as irregularidades da Natureza, por intermédio de quantidades matemáticas, às quais chamou de fractais. Tais quantidades não são números e nem formas inteiras, e sim relações matemáticas capazes de descrever formas irregulares infinitamente complexas, e que são invariantes por uma transformação de escala. Mais tarde, foi observado que essas entidades matemáticas são úteis para estudar o *movimento browniano* [descoberto pelo botânico escocês Robert Brown (1773-1358) ao observar, em 1828, que em uma suspensão de grãos de pólen em água, cada grão se movia irregularmente (vide verbete nesta série)], a turbulência de fluidos incompressíveis, a rugosidade da superfície de certos materiais, a porosidade de certas rochas, a repartição dos defeitos nas estruturas vítreas ou amorfas e, de modo geral, os agregados, como os colóides e aerosóis. Essa nova Geometria foi apresentada por Mandelbrot, em 1975, no livro intitulado Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension (Flammarion, Paris) e, em 1977, no livro The Fractal Geometry (W. H. Freeman and Company). Note que, em 1979 (*Journal of Physics, Mathematical and General* A12, p. L109), S. R. Forrest e T. A. Witten foram os primeiros a mostrar que os agregados colóides são, em boa aproximação, os fractais de Mandelbrot. Note, também, que a dimensão D de uma *reta fractal* é dada pela expressão:

$$D = \ell n\ N(r) / \ell n\ (1/r),$$

onde N é o número de subdivisões do segmento de reta dado (réplicas de si próprio) e r é um parâmetro chamado fator de escala, que representa a unidade de medida. Para cálculo de D para algumas figuras fractais, ver, por exemplo: Aguinaldo Prandini Ricieri, Fractais e Caos: A Matemática de Hoje (Parma Ltda., 1990); Maria Cecília Costa e Silva Carvalho, Aristóteles Antonio da Silva, Deise Cristina Moreira da Silva Boccia, Joaquim Fernando Prado Ribeiro e Sérgio Américo Boggio, Fractais: Uma Breve Introdução (Edição dos Autores, s/d).

É interessante destacar que a geometria fractal pode ser utilizada no diagnóstico do câncer, observando a dimensão fractal da interface entre tecidos em lâminas histológicas [Gabriela Diniz, A matemática do câncer, *Ciência Hoje* 232, p. 48 (Novembro de 2006)], bem como na busca de uma teoria quântica da gravitação [Jan Ambjorn, Jerzy Jurkiewicz e Renate Loll, Universo Quântico Auto-organizado, *Scientific American Brasil* 75, p. 28 (Agosto de 2008)].

Voltemos ao caos. Em 1975, o físico norte-americano Mitchell Jay Feigenbaum (n.1944), da *Universidade de Cornell*, teórico especialista em Partículas Elementares, descobriu que sistemas simples de números, quando repetidamente operados sobre si mesmos, inicialmente revelam uma série lógica de resposta, mas, de modo súbito, começam a produzir respostas sem nexo, *caóticas*. Em 1978 (*Journal of Statistical Physics* 19, p. 25) e 1979 (*Journal of Statistical Physics* 21, p. 669), usando uma aplicação do Grupo de Renormalização, Feigenbaum provou que havia uma "duplicação periódica" entre a *ordem* e o caos, de período δ = 4,6692016090, formando uma árvore de auto-similaridade, ou seja, dado um de seus ramos ele apresenta a mesma forma do que a do ramo original. Feigenbaum demonstrou mais ainda que a taxa em que esses ramos se abrem é também regulada por uma constante universal (a) e que tem o seguinte valor a = 5.029.078.750.957. Provou também que isso era verdade para todos os sistemas algébricos não-lineares. Esse par de números (δ, a) é hoje conhecido como *números de Feigenbaum*. Em 1980 (*Physics Letters* A74, p. 375; *Communications in Mathematical Physics* 77, p. 65), Feigenbaum estendeu esse seu trabalho para um número arbitrário de dimensões, provando então que o período δ se mantinha para todos os sistemas algébricos não-lineares. Observe que essa descoberta de Feigenbaum passou a ser conhecida como a *Universalidade de Feigenbaum*. Em 1979 (*Journal de Physique* 40, p. L419), 1980 (*Journal de Physique* C3, p. 51) e 1982 (Nonlinear Phenomena at Phases Transitions and Instabilities, Plenum, N.Y.), os franceses, o físico Albert Joseph Libchaber (n.1934) e o engenheiro Jean Maurer apresentaram os primeiros resultados experimentais sobre a *árvore de Feigenbaum* no movimento turbulento do hélio líquido (He II). Por seu lado, as cascatas de duplicações de δ foram observadas, em 1982 (*Journal de Physique-Lettres* 43, p. L211), por Libchaber, C. Laroche e S. Fauve realizando experiências sobre a convecção do mercúrio (Hg). Ainda nesse mesmo ano de 1982, Feigenbaum (*Physica* D5, p. 370) publicou um trabalho no qual reuniu suas pesquisas sobre a Teoria do Caos, assim como Oscar E. Lanford (*Bulletin of the American Mathematical Society* 6, p. 427) apresentou um estudo computacional sobre as *conjecturas de Feigenbaum*.

Nas décadas de 1970 e 1980, o físico belga David Ruelle (n.1935) realizou trabalhos sobre sistemas *caóticos*, dos quais resultou uma relação entre caos e fractais. Com efeito, logo em 1971 (*Communications in Mathematical Physics* 20, p. 167; *Addendum* 21, p. 21; 23, p. 343), ele e o matemático holandês Floris Takens (n.1940) estudaram a natureza da turbulência hidrodinâmica e representaram as variáveis de alguns sistemas caóticos como pontos em uma tela de computador. Ao unirem esses pontos, observaram que se desenhou uma linha curvando-se sobre si mesma, repetidas vezes. Tais formas geométricas, os *atratores estranhos*, conforme eles os denominaram, ao serem examinadas de perto, mostraram que cada uma de suas partes era uma representação menor do todo, ou seja, que havia uma invariância de escala, ou melhor, eles apresentavam *dimensão fractal*. Embora esses "entes estranhos" já tivessem sido observados por Lorenz, (o hoje conhecido *atrator de Lorenz*), em 1963, em seu trabalho sobre o clima, conforme registramos acima, foi o astrônomo francês Michel Hénon (n.1931) quem descreveu pela primeira vez, em 1976 (*Communications in Mathematical Physics* 50, p. 69), um *atrator estranho* (hoje conhecido como *atrator Hénon*) ao observar as trajetórias de estrelas em torno de um centro galáctico. Em 1981, Takens estudou os *atratores estranhos* em turbulência *IN*: D. A. Rand and L. S. Young (Editors), Dynamical Systems and Turbulence (Springer-Verlag. p. 366). É oportuno registrar que, em 1993, Takens e o matemático brasileiro Jacob Palis Junior (n.1940) escreveram o livro intitulado Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations (Cambridge University Press).

Novos *sistemas caóticos* foram estudados por Ruelle. Por exemplo, em 1973 (*Transactions of the New York Academy of Sciences* 35, p. 66), ele analisou *reações químicas caóticas*. Mais tarde, em 1979 (*Physics Letters* A72, p. 81) e 1982 (*Communications in Mathematical Physics* 87, p. 287), Ruelle investigou a passagem das flutuações microscópicas a mudanças macroscópicas na estrutura da turbulência. Mais detalhes do trabalho de Ruelle sobre sistemas caóticos ver seu livro intitulado Acaso e Caos (EdUNESP, 1993). Para outros textos sobre os *sistemas caóticos*, ver, por exemplo: James Gleick, Caos: A Criação de uma Nova Ciência

(Camus, 1990); Ian Stewart, Será que Deus Joga Dados? A Nova Matemática do Caos (Jorge Zahar, 1991); Nelson Fiedler-Ferrara e Carmen P. Cintra do Prado, Caos: Uma Introdução (Edgard Blücher Ltda., 1994); Ilya Prigogine, O Fim das Certezas: Tempo, Caos e as Leis da Natureza (EdUNESP, 1996); Hersh Moysés Nussenzveig (Organizador), Complexidade e Caos (EdUFRJ/COPEA, 1999); Ilya Prigogine, As Leis do Caos (EdUNESP, 2002).

O comportamento *caótico* estudado acima se relaciona com um sistema dissipativo clássico determinístico. Em vista disso, surge a pergunta: existirá o *caos quântico*? Segundo o Princípio da Correspondência (PC) formulada pelo físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962; PNF, 1922), em 1920, a Mecânica Clássica é um caso particular da Mecânica Quântica, ou seja, esta tem um *limite clássico*. Assim, se os sistemas clássicos apresentam uma sensibilidade (que leva ao caos) às condições iniciais, então, seguindo o PC, os sistemas quânticos também devem apresentar a mesma sensibilidade. Várias abordagens ("approaches") têm sido realizadas para encontrar essa correspondência. Uma dessas abordagens é a análise da distribuição estatística das linhas espectrais de elementos químicos e sua correlação com a periodicidade de órbitas clássicas quando sujeitas a uma perturbação não desprezível (p.e.: ação de um campo elétrico). Desse modo, na experiência realizada em 1995 (*Physical Review* A51, p. 3604), por M. Courtney, N. Spellmeyer, H. Jiao e D. Kleppner, sobre a ionização de um feixe de átomos de hidrogênio (H) e de lítio (Li), eles observaram que, depois dos feixes passarem por uma cavidade de microondas, dotada de um campo elétrico variável, o feixe só é ionizado se o campo elétrico for forte. Esse comportamento é considerado como sendo um *comportamento caótico quântico*. Por outro lado, esse tipo de comportamento também pode ser estudado no pacote de onda de uma partícula representada por uma equação de onda schrödingeriana sob medida contínua, conforme foi analisado pelo físico brasileiro Antonio Boulhosa Nassar (n.1953), em 2004, no artigo Caotic Behavior of a Wave Packet under Continuos Quantum Mechanics (*preprint*). Para maiores detalhes sobre caos quântico, ver: Martin Gutzwiller, Quantum Chaos (*Scientific American*, January 1992); en.wikipedia.org/wiki/Quantum_chaos.

ANTERIOR SEGUINTE