CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

A Quarta Dimensão e a Geometria não-Euclidiana (Riemanniana e Minkowskiana).

Por volta do ano 300 a. C., o matemático grego Euclides de Alexandria (c.323-c.285) escreveu seu famoso compêndio **Elementos de Geometria** [*Great Books of the Western World* **10** (Encyclopaedia Britannica, Inc., 1993)], composto de 13 Livros. No Livro 1, ele apresenta 23 definições entre as quais estão as de ***ponto***, ***linha*** e ***superfície***, assim definidos: 1) *Um **ponto** é o que não tem partes;* 2) *Uma **linha** é um comprimento sem largura*; 5) *Uma **superfície** é a que tem somente comprimento e largura*. A terceira dimensão só é tratada por Euclides no *Livro* 11, quando inicia o mesmo com a definição de ***sólido***: 1) *Um **sólido** é o que tem comprimento, largura* (*profundidade*) *e altura*. Em todo esse famoso compêndio, Euclides só trata da Geometria Linear, Plana e Espacial, sem falar na possibilidade de uma **quarta dimensão**. A partir daí, a **quarta dimensão** foi desconsiderada até ser questionada e, posteriormente aceita, a partir do Século 16, como veremos no decorrer deste verbete. [Michio Kaku, **Hiperespaço** (Rocco, 2000)].

A impossibilidade da **quarta dimensão** também foi aceita pelo filósofo grego Aristóteles de Estagira (384-322). Com efeito, em seu compêndio **De Caelo** ("Sobre o Céu") [*Great Books of the Western World* **1** (Encyclopaedia Britannica, Inc., 1993)], composto de 4 Livros, ele tratou daquela impossibilidade logo no Capítulo 1, do Livro 1, dizendo, em resumo, que: - *A linha tem magnitude em um sentido, o plano em dois sentidos, e o sólido em três sentidos, e além destas não há nenhuma magnitude porque as três são tudo* (Kaku, op. cit.). Por sua vez, o astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (85-165) em seu livro **Sobre a Distância**, publicado em 150 d.C., apresentou uma "prova" sobre a impossibilidade da **quarta dimensão**.

Vejamos como Kaku (op. cit.), descreve essa "prova". Ptolomeu considerou primeiro, o traçado de três linhas mutuamente perpendiculares como, por exemplo, as arestas de um cubo. Em seguida, ele tenta traçar uma quarta linha que seja perpendicular a essas três arestas. Apesar de ele tentar por várias vezes fazer esse traçado e não conseguir, ele concluiu não ser possível realizar tal traçado. Em vista disso, ele concluiu pela não existência da **quarta dimensão**. O que talvez Ptolomeu não haja percebido era que acabara de demonstrar a impossibilidade de o cérebro tridimensional humano "visualizar" a **quarta dimensão** e não a sua inexistência.

Creio ser importante registrar, neste momento, que os primeiros pintores, que trabalhavam em um espaço bidimensional, tinham bastante dificuldade em representar a ***terceira dimensão***. O primeiro que introduziu a ***tridimensionalidade*** nas pinturas foi o pintor italiano Giotto di Bondone [1266/1267(1276)-1337]. Note que, além dessa inovação, foi ele quem pintou, pela primeira vez, o Céu de azul, ao invés do tradicional dourado. A representação da ***tridimensionalidade*** na pintura tomou um aspecto científico quando os pintores e arquitetos do período conhecido como ***Quattrocento*** (primeiras décadas do Século XV), começaram a estudar a relação entre a Óptica Geométrica e a Perspectiva (vide verbete nesta série).

Retornemos à **quarta dimensão**. A ideia de uma nova dimensão "espacial" voltou a ser objeto de estudo por vários matemáticos nos Séculos 16 e 17. Com efeito, o físico, filósofo, matemático e médico italiano Ge(i)rolamo Cardano (Hieronymus Cardanus, Jerome Cardan) (1501-1576) e o matemático francês François Viète (1540-1603) trataram dessa dimensão "adicional" em suas pesquisas sobre equações quadráticas e cúbicas. O mesmo fez o matemático e físico francês Blaise Pascal (1623-1662) em seu trabalho intitulado **Traité des trilignes rectangles et le leurs anglets** ("Tratado das três linhas retangulares e seus ângulos") quando, ao generalizar suas "trilignes" (três linhas) do plano ao espaço e mais além, escreveu que: - *A quarta dimensão não é contra a geometria pura*. Contudo, em seu **Treatise on Algebra** ("Tratado sobre Álgebra"), publicado em 1685, o matemático inglês John Wallis (1616-1703) voltou a condenar uma nova dimensão "espacial" afirmando que: - *Ela é um Monstro na Natureza, menos possível que uma Quimera ou Centauro... Comprimento, Profundidade e Espessura tomam todo o Espaço. Tampouco pode a Fantasia imaginar como poderia haver uma Quarta Dimensão Local além destas Três*. [Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (John Wiley and Sons, 1968); Dirk Jan Struik (Editor), **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969); Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972); Kaku, op. cit.].

O tema da **quarta dimensão** voltou a ser tratado no Século 18, porém, desta vez, ligada ao <u>tempo</u> e não como uma extensão do espaço tridimensional, conforme o matemático francês Jean le Rond d´Alembert (1717-1783) propôs em seu artigo **Dimension** ("Dimensão") escrito para a *Encyclopédie* ou *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et de Métiers*, uma obra composta de 28 volumes, escritos entre 1751 e 1772, editada pelo filósofo francês Denis Diderot (1713-1784), tendo d´Alembert como seu Diretor Científico. O <u>tempo</u> como uma **quarta dimensão** também foi considerado pelo matemático e astrônomo ítalo-francês Joseph-Louis, Conde de Lagrange (1736-1813), em seus livros **Mécanique Analytique** ("Mecânica Analítica"), de 1788, e **Théorie des Fonctions Analytiques** ("Teoria das Funções Analíticas), de 1797. Posteriormente, Lagrange afirmou que: - *Podemos considerar a Mecânica como uma Geometria de quatro dimensões e a Mecânica Analítica como uma extensão da Geometria Analítica*. Note que esta Geometria havia sido desenvolvida pelo filósofo e matemático francês René du Perron Descartes (1596-1650) em seu livro **La Géométrie** ("A Geometria"), publicado em 1637 (Kline, op. cit.).

Em 1827, no livro intitulado **Der Barycentrische Calcul** ("Sobre o Cálculo do Baricentro"), o matemático alemão Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) rejeitou a **quarta dimensão** quando observou que as figuras geométricas não poderiam ser superpostas em três dimensões, pois elas são imagens especulares de elas mesmas. Essa superposição, contudo, só poderia ocorrer em um espaço de quatro dimensões, ... *porém, como esse espaço não pode ser pensado, essa superposição é impossível* (Kline, op. cit.).

A **quarta dimensão** também foi proposta pelo físico e matemático alemão Julius Plücker (1801-1868) em seu livro intitulado **System der Geometrie des Raumes** ("Sistema de Geometria no Espaço"), publicado em 1846, no qual afirmou que planos nada mais são do que coleções de ***linhas***, assim como a intersecção destas resultam em ***pontos***. Em vista disso, Plücker disse que se as ***linhas*** são elementos fundamentais do ***espaço***, então este é 4-dimensional, pois são necessários quatro parâmetros para cobrir todo o ***espaço*** com ***linhas***. Contudo essa proposta de um espaço 4-dimensional formado de ***pontos*** foi rejeitada, por soar como ***metafísica***. Apesar dessa rejeição, ficou claro para os matemáticos de que a tridimensionalidade geométrica deveria ser ampliada. É interessante destacar que, antes, em 1748, e posteriormente, em 1826, o físico e matemático holandês Leonhard Euler (1707-1783) e o matemático francês Augustine Louis Cauchy (1789-1857), respectivamente, já haviam pensado em representar as ***linhas retas*** no ***espaço***. Por sua vez, em 1843, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895), havia desenvolvido a Geometria Analítica em um espaço n-dimensional, tendo a teoria dos determinantes (nome cunhado por Cauchy) como ferramenta. Logo depois, em 1844, o matemático alemão Hermann Günter Grassmann (1809-1877) publicou o livro **Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathemnatik** ("Teoria da Extensão Linear, um novo Ramo da Matemática"), no qual ele pensou em uma Geometria n-dimensional, estimulado pela descoberta dos quatérnios, anunciada pelo matemático e físico irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), em 1843. (Boyer, op. cit.; Kline, op. cit.).

As ideias a cerca de uma **quarta dimensão** vistas acima só se transformaram em conjecturas com o desenvolvimento das Geometrias não-Euclidianas, no Século 19 [Francisco Caruso, **Nota sobre a Dimensionalidade do Tempo**, ***IN***: **Diálogos sobre o Tempo** (APC/FMin/Maluhy&Co., 2010)]. Vejamos como isso aconteceu. É atribuído ao geômetra grego Tales de Mileto (c.624-c.546) a demonstração dos seguintes teoremas: 1) *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais* (Proposição 5, do Livro

1 de Euclides); 2) *São iguais os ângulos alternos-internos formados por uma reta intersectando duas retas paralelas* (Proposição 15, do Livro 1 de Euclides). Esses teoremas permitem demonstrar o hoje conhecido ***Teorema de Tales*** (TT): - *A soma dos ângulos internos de um triângulo vale sempre* 180^0 (Proposição 32, do Livro 1 de Euclides). Pois bem, esse TT foi considerado como uma *verdade divina* pelo italiano São Tomás de Aquino (1225-1274), uma vez que, em seu famoso livro **Summa Theologiae** ("Súmula Teológica"), publicado em torno de 1265, afirmou haver demonstrado que **DEUS** *não* podia construir um triângulo cujos ângulos interiores somassem além de 180^o. É oportuno afirmar que o TT é também uma decorrência do famoso Postulado 5 do Livro 1 de Euclides: - *Se uma reta* (A) *corta duas outras* (B e C) *de modo que a soma dos ângulos do lado direito de* A *é menor do que a soma de dois ângulos retos* (180^0)*, então as retas* B *e* C *se encontrarão quando prolongadas do mesmo lado daqueles ângulos*. Esse Postulado 5 recebeu do matemático inglês John Playfair (1748-1819), em 1795, o seguinte enunciado: - *Por um ponto* P *fora de uma reta* (r) *só se pode traçar uma e somente uma paralela a* r. Esse postulado também ficou conhecido como o ***Postulado das Paralelas*** (PP). [Carlos Tomei, **Euclides: A Conquista do Espaço** (Odysseus, 2003); Boyer, op. cit.; Kline, op. cit.]

O PP começou a ser questionado pelo matemático e físico alemão John Karl Friedrich Gauss (1777-1855) – o inventor do conceito de ***curvatura*** -, na última década do Século 18, quando tentou demonstrá-lo usando a Geometria Euclidiana. Com efeito, em 1792, com 15 anos de idade, escreveu uma carta ao seu amigo o astrônomo alemão Heinrich Christian Schumacher (1780-1850), na qual discutiu a possibilidade da existência de uma Geometria Lógica na qual o PP não se mantém. Em 1794, ele conceituou uma nova Geometria cuja área de um quadrângulo deveria ser proporcional à diferença entre 360^0 e a soma de seus ângulos. Mais tarde, em 1799, escreveu uma carta ao seu amigo o matemático húngaro Wolfgang Farkas Bolyai (1775-1856) dizendo que tentara, sem sucesso, deduzir o PP a partir de outros postulados da Geometria Euclidiana (Kaku, op. cit.; Kline, op. cit.).

No Século 19, Gauss continuou discutindo com amigos, a possível existência de uma **Geometria não-Euclidiana**. Assim, por volta de 1813, desenvolveu o que chamou inicialmente de Geometria anti-Euclidiana, depois de Geometria Astral e, por fim, de **Geometria não-Euclidiana**. A convicção da existência dessa Geometria levou Gauss a escrever, em 1817, uma carta ao seu amigo o astrônomo e médico alemão Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758-1840), na qual declarou que a necessidade física de *nossa Geometria Euclidiana não pode ser provada pela razão humana. Talvez em uma outra vida sejamos capazes de obter um discernimento sobre a natureza do espaço, o qual agora é inatingível. Até agora, não devemos colocar a Geometria na mesma classe da Aritmética, que é puramente* ***a priori****, mas com a Mecânica* (Kline, op. cit.). Sete anos depois, em 1824, em resposta a uma carta que o matemático alemão Franz Adolf Taurinus (1794-1874) lhe escrevera e na qual lhe falou sobre a demonstração que fizera de que a soma dos ângulos internos de um triângulo não pode ser nem maior e nem menor do que 180^0, Gauss disse-lhe que nessa demonstração faltava um rigor geométrico, uma vez que, a despeito de os "metafísicos" considerarem a Geometria Euclidiana como verdadeira, esta Geometria era incompleta. É interessante destacar que os "metafísicos" citados por Gauss, eram os seguidores do filósofo alemão Emmanuel Kant (1724-1804) que, em sua **Kritik der reinen Vernunft** ("Crítica da Razão Pura") [*Great Books of the Western World* **39** (Encyclopaedia Britannica, Inc., 1993)], escrito em 1781 e logo em seu Capítulo I intitulado Doutrina Transcendental de Elementos, apresentou as seguintes afirmações: a) *Espaço não é uma concepção que deriva de experiências externa*; b) *Espaço é uma necessária representação a priori que serve para fundamentar todas as intuições externas*; c) *Espaço é representado por uma quantidade infinita*; d) *Espaço tem somente três dimensões*; d) *Geometria é uma ciência sintética a priori, tornada compreensível*.

Muito embora se deva a Gauss a descoberta da **Geometria não-Euclidiana**, ele não teve coragem para publicar o que descobrira, pois, segundo carta que escreveu ao seu amigo o astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), em 27 de janeiro de 1829, afirmou que: - *Provavelmente nunca publicaria seus achados sobre esse assunto porque temia o ridículo (ou, em suas próprias palavras), temia o clamor dos beócios (os crentes da natureza sagrada do espaço tridimensional), uma referência figurativa a uma tribo grega de atoleimados* (*retardados mentais*). Em sua pesquisa sobre a existência de uma **Geometria não-Euclidiana**, Gauss imaginou hipotéticas "traças" que poderiam viver exclusivamente numa superfície bidimensional, assim como poderiam existir outros "seres" capazes de viver em um espaço de quatro ou mais dimensões. É interessante destacar que, para tentar provar sua descoberta, Gauss e seus assistentes mediram os ângulos de um triângulo formado pelos picos de três montanhas, Brocken, Hohehagen e Inselsberg, pertencentes às Montanhas Harz, localizadas na Alemanha, e que distavam 69, 85 e 197 kms entre si, respectivamente. A soma dos ângulos internos desse triângulo foi de apenas de 180^0 e 14",85. Esse resultado frustrou Gauss, pois esse erro estava dentro dos erros que decorriam dos equipamentos que usou para medir os ângulos (Kaku; op. cit.; Kline, op. cit.).

Independentemente de Gauss, os matemáticos, o russo Nikolay Ivanovich Lobachevski (1793-1856), em 1826 [publicado somente em 1837 (*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **17**, p. 295)], e o húngaro János Bolyai (1802-1860) (filho de Wolfgang), em 1832, no livro intitulado **Absoluten Geometrie** ("Geometria Absoluta"), demonstraram que existem triângulos cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180^o. Depois de o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) defender sua *Doktoratsschrift* (Tese de Doutorado), no dia 16 de dezembro de 1851, na *Universidade de Göttingen*, sobre as ***séries de Fourier*** (vide verbete nesta série) e as hoje conhecidas ***superfícies de Riemann***, ele começou a se preparar para ser *Privatdozent* [Livre (Particular) Docente] dessa mesma Universidade. Assim, no final de 1853 ele apresentou sua Tese de Doutoramento como inscrição à *Habilitationsschrift* (Tese de Habilitação) seguida de três tópicos para a *Habilitationsvortrag* (Exame Oral de Habilitação). Para sua surpresa, Gauss escolheu o terceiro tópico intitulado **Über die Hypotyhesen, welche der Geometrie zu Grunden liegen** ("Sobre as Hipóteses que estão na Base da Geometria"), no qual demonstrou a existência de triângulos nos quais a soma de seus ângulos internos ultrapassa 180^o. Esse tópico defendido timidamente por Riemann no dia 10 de junho de 1854, porém, causou um profundo impacto em Gauss, pois representava exatamente as suas ideias sobre uma **Geometria não-Euclidiana** (hoje, ***Geometria Riemanniana***) que ele, Gauss, não teve coragem de publicar, discutindo apenas com amigos, conforme vimos acima. É oportuno destacar que essas geometrias, hoje conhecidas como **Geometrias Não-Euclidianas**, decorreram da observação de que o PP poderia apresentar duas novas interpretações. Na ***Geometria Hiperbólica de Bolyai-Lobachevski***: - *Por um ponto fora de uma reta <u>se pode traçar</u> uma infinidade de paralelas à mesma*, e na ***Geometria Esférica de Riemann***: - *Por um ponto fora de uma reta <u>não se pode traçar</u> nenhuma paralela à mesma*. [Roberto Bonola, **Geometrías No Euclidianas** (Espasa-Calpe Argentina, S.A. 1951); Hans Freudenthal, **Bernhard Riemann**, ***IN***: **Dicionário de Biografias Científicas III** (Contraponto, 2007); Kline, op. cit.; Kaku, op. cit.].

Registre-se que o próprio Riemann generalizou o conceito de ***Geometrias***, ao introduzir a definição de ***métrica***, com a qual se pode calcular a distância entre dois pontos, dada por (em linguagem atual):

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ij}\, dx^i\, dx^j\ ;\ \ g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle,\ \ (i, j = 1, 2, 3)$$

onde g_{ij} é o ***tensor métrico de Riemann***, sendo $g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i{}^k = \delta_k{}^i = \delta_{ik} = \delta^{ik}$, com o símbolo (hoje, tensor) $\delta_i{}^k = 1$, se i = j, e 0 se i ≠ j, conhecido como ***delta de Kronecker***, e_i e e_j são os ***vetores-base*** de um dado sistema de coordenadas, e < , > é o produto escalar. Por exemplo, para o caso de coordenadas retilíneas (x, y, z), temos $g_{ij} = \delta_{ij}$, então:

$$ds^2 = \Sigma\ \ \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j\ = dx^2 + dy^2 + dz^2\ ,$$

conhecida como ***métrica euclidiana***. [José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Cálculo Exterior** (Livraria da Física, 2009)].

O trabalho de Riemann sobre a **Geometria não-Euclidiana** (que possibilitava a existência de mais dimensões além das três espaciais conhecidas, pois, poderíamos ter: i, j = 1, 2, 3, 4, ..., n) logo floresceu em toda a Europa, com eminentes cientistas divulgando esse trabalho para o grande público. Por exemplo, o físico e fisiologista alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894), usou as "traças" de Gauss habitando agora em uma ***superfície riemanniana*** (esfera). Contudo, em seu livro intitulado **Popular Lectures of Scientific Subjects** ("Conferências Populares sobre Temas Científicos"), publicado em 1881, advertiu que era impossível representar (visualizar) a **quarta dimensão**, pois, ... *tal representação é tão impossível quanto o seria a representação de cores para um cego de nascença*. É também interessante ressaltar que a possibilidade da existência da **quarta dimensão** permitiu o aparecimento de vários médiuns que diziam usar a "quarta dimensão" para descobrir fatos futuros de pessoas. O exemplo típico é o do médium norte-americano Henry Slade [1835(?)-1905], com suas célebres "consultas" realizadas para figuras proeminentes de Londres, que resultou em sua prisão acusado de fraude, no dia 01 de outubro de 1876. O mais impressionante, foi que vários físicos [os alemães Johann Karl Friedrich Zöllner (1834-1882) e Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), e os ingleses William Crookes (1832-1919), John William Scott, Lord Rayleigh (1842-1919; PNF, 1904) e Sir Joseph John Thomson], foram testemunhas de defesa de Slade. Para detalhes desse fato e de outros acontecimentos do que foi o "fascínio da quarta dimensão", principalmente depois da descoberta do espaço quadri-dimensional relativista einsteniano (ver verbetes nesta série), ver Kaku, op. cit.

Concluindo este verbete, é interessante destacar que, muito embora o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), haja demonstrado, em 1904, que o tempo está relacionado com o espaço tridimensional, relação essa conhecida como as ***Transformações de Lorentz*** (TL) (vide verbete nesta série), foi o matemático russo-alemão Hermann Minkowski (1864-1909) quem demonstrou, em 1908 (*Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 53), que as TL representavam uma espécie de "rotação" num espaço 4-dimensional (x, y, z, ict; i = $\sqrt{-1}$), com uma ***métrica*** (medida da distância entre dois pontos nesse espaço) definida por:

$$ds^2 = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

expressão essa que caracteriza a ***métrica minkowskiana***, também conhecida como ***métrica pseudo-euclidiana***, pela presença do sinal menos (-) no quarto termo. Note que, para evitar usar o $\sqrt{-1}$ (i), os matemáticos definiram uma ***assinatura*** para $g_{\mu\nu}$, em que os índices μ e ν valem 1, 2, 3, 4 (+, +, +, -) ou 0, 1, 2, 3 (+, -, -, -) (Caruso, op. cit.).

Por fim, é interessante ainda destacar que, conforme vimos em verbete desta série, dificuldades com a Teoria da Unificação das Interações Físicas (eletromagnética, forte, fraca e gravitacional), levou os físicos a desenvolver a **Teoria M,** que é uma teoria unificadora, envolvendo um espaço de onze (11) dimensões (sendo uma temporal). As sete (7) dimensões espaciais são recurvadas no ***espaço de Calabi*** (1957)-***Yau*** (1977) e a elas são atribuídas outras propriedades, como massa e carga elétrica, além de possuírem dimensões equivalentes ao ***comprimento de Planck*** (≈ 10^{-33} cm). [Michio Kaku, **Introduction to Superstrings and M-Theory** (Springer-Verlag, 1999)].
