CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

Álgebra e Análise Vetorial, e os 4-Vetores de Minkowski.

Em 1844, o matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877) (grande autoridade em sâncristo) publicou o livro intitulado **Die Lineale Ausdehnungslehre: Ein neuer Zweig der Mathematik** ("A Teoria de Extensão Linear: Um novo Ramo da Matemática"), que pode ser considerado o precursor da **Álgebra Vetorial** uma vez que, as duas operações (***produto interno*** e ***produto externo***) que ele define nesse livro para tratar dos ***hipernúmeros*** – uma generalização dos números complexos -, são hoje conhecidos como o **produto escalar** (**.**) e o **produto vetorial** ($\times$) entre esses novos entes matemáticos: **vetores**. Estes são caracterizados por seus componentes em relação a um dado sistema de coordenadas. Em Física, os mais usados desses sistemas são: cartesiano (x, y, z), cilíndrico (a, θ, z) e esférico (r, θ, ϕ). Por exemplo, no caso cartesiano, aqueles produtos entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, são dados por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \,,$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k} \,,$$

sendo $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ os ***versores*** (vetores unitários) na direção dos eixos dos x, y, z, respectivamente. Para outros sistemas de coordenadas, ver: Thor A. Bak and Jonas Lichtenberg, **Vectors, Tensors and Groups** (W. A. Benjamin, Inc., 1967); José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Álgebra Exterior** (Livraria da Física, 2009).

Em Mecânica, temos os seguintes exemplos dessas duas operações vetoriais:

$\vec{F} \cdot \vec{s} = \tau$ (***trabalho mecânico***); $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ (***torque***); $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (***momento angular***),

onde $\vec{F}$ **=** m $\vec{a}$ é o ***vetor força*** [sendo $\vec{a} = \vec{v}/t$, o ***vetor aceleração***; $\vec{v} = \vec{s}/t$, o ***vetor velocidade***; e $\vec{s}$, o ***vetor espaço***], $\vec{r}$ é o ***vetor posição***, e $\vec{p} = m\vec{v}$ é o ***vetor momento linear***, e m a massa. Para outros exemplos físicos, ver: Bassalo e Cattani, op. cit.

Em 1853, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) publicou o livro **Lectures on Quaternions** ("Conferências sobre Quatérnios"), no qual desenvolveu a teoria dos ***quatérnios***, um ente matemático composto de quatro componentes, que decorre da aplicação do operador diferencial ***nabla***, de notação $\vec{\nabla}$ (dada por ele porque se assemelhava a um antigo instrumento musical hebreu que tinha essa forma e era chamado de ***nabla***) e definido por:

$$\vec{\nabla} = (d/dx)\,\hat{i} + (d/dy)\,\hat{j} + (d/dz)\,\hat{k} \,,$$

que aplicado a uma função vetorial $\vec{V}$, resulta:

$$\vec{\nabla}\vec{V} = S\vec{\nabla}\vec{V} + V\vec{\nabla}\vec{V} \,,$$

sendo:

$$S\vec{\nabla}\vec{V} = -\,[(dV_x/dx) + (dV_y/dy) + (dV_z/dz)] \,,$$

$$V\vec{\nabla}\vec{V} = (dV_z/dy - dV_y/dz)\,\hat{I} + (dV_x/dz - dV_z/dx)\,\hat{J} + (dV_y/dx - dV_x/dy)\,\hat{K}$$

que, como se pode ver por essas expressões, o ***quatérnio hamiltoniano*** é constituído de uma parte escalar e de uma parte vetorial.

Em verbetes desta série, vimos que, em 1871, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) retomou os ***quatérnios*** de Hamilton para construir a sua Teoria Eletromagnética, porém, redefiniu-os, da seguinte maneira: 1) $S\vec{\nabla}\vec{V}$ foi chamado por ele de ***convergência***, pois a mesma já havia aparecido no estudo da hidrodinâmica desenvolvida no Século 18, principalmente nos trabalhos do matemático francês Jean le Rond d´Alembert (1717-1783), em 1749: 2) $V\vec{\nabla}\vec{V}$ ele o chamou de **rotacional**, pois ela significava ser duas vezes a taxa de rotação de um fluido em um ponto. Por outro lado, o produto escalar do ***nabla*** ($\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2$) aplicado a uma função escalar (q) foi chamado por Maxwell de ***concentração***, pois representava o excesso do valor de q em um dado ponto sobre o seu valor médio na vizinhança daquele mesmo ponto. É oportuno registrar que o operador ∇^2 já havia sido inventado pelo matemático e astrônomo francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), em 1782, em seu estudo da atração gravitacional entre corpos. Contudo, ele não usava a notação ∇ e ∇^2, e sim: $\partial^2/\partial x_i^2$ e $\partial/\partial x_i$, sendo i = 1, 2, 3, respectivamente. Somente em 1833, o matemático inglês Robert Murphy (1805-1843) usou a notação Δ para o hoje conhecido operador **laplaciano**.

Ainda em 1871, Maxwell demonstrou os seguintes importantes Teoremas da Análise Vetorial (em notação atual):

$$\nabla\times\nabla V = 0;\ \nabla.\ \nabla\times\vec{F} = 0;\ \Delta\vec{F} = \nabla(\nabla.\ \vec{F}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{F}).$$

A linguagem dos ***quatérnios hamiltonianos*** foi substituída pelo físico e químico norte-americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903) em seu livro de nome **Elements of Vector Analysis** ("Elementos de Análise Vetorial"), escrito em 1881. Nele, as operações diferenciais sobre vetores, envolvendo o ***operador gradiente*** (∇) e as operações algébricas (**.**) e ($\times$), são representadas por: $\nabla.$ (**divergência**), $\nabla\times$ (**rotacional**) e $\nabla.\ \nabla \equiv \Delta$ (**laplaciano**). Registre que o nome **divergência** foi dado pelo matemático e filósofo inglês William Kingdon Clifford (1845-1879). Essa nova linguagem vetorial também foi usada pelo físico e engenheiro eletricista inglês Oliver Heaviside, no livro **Electromagnetic Theory** ("Teoria Eletromagnética"), que escreveu em 1893. [Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972)].

Conforme vimos em verbete desta série, um exemplo, em Física, dessas novas operações vetoriais é dado pelas famosas ***Equações de Maxwell*** (em notação atual, no sistema CGS e no vácuo):

$$\nabla.\ \vec{E} = 4\pi\rho;\ \nabla\times\vec{B} - (1/c)\partial\vec{E}/\partial t = (4\pi/c)\vec{J};$$

$$\nabla.\ \vec{B} = 0;\ \nabla\times\vec{E} + (1/c)\partial\vec{B}/\partial t = 0,$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ representam, respectivamente, o ***campo elétrico*** e a ***indução magnética***, ρ é a ***densidade de carga elétrica***, $\vec{J}$ é a ***densidade de corrente elétrica***, e c é a ***velocidade da luz no vácuo***. [John David Jackson, **Classical Electrodynamics** (John Wiley and Sons, 1975); Josif Frenkel, **Princípios de Eletrodinâmica Clássica** (EDUSP, 1996); José Maria Filardo Bassalo, **Eletrodinâmica Clássica** (Livraria da Física, 2007)]. É oportuno registrar que Maxwell apresentou essas equações em seu livro **A Treatise on Electricity and Magnetism** ("Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo") (Dover Publications, Inc., 1954), publicado em 1873, usando a linguagem dos ***quatérnios hamiltonianos***.

Em 1904 (*Koniklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **6**, p. 809), o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902) demonstrou que as coordenadas espaciais (x, y, z) e o tempo (t) se transformam da seguinte maneira:

$$x' = \gamma\,(x - vt);\;\; y' = y;\;\; z' = z;\;\; t' = \gamma\,(t - vx/c^2),\;\; [\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}]$$

quando um sistema de coordenadas (x´, y´, z´) se desloca com uma velocidade v constante, paralelamente ao eixo dos x de um sistema de coordenadas (x, y, z). Esse grupo de equações foi denominado de ***Transformações de Lorentz*** (TL) pelo físico e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), em 1905 (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l´Académie des Sciences de Paris* **140**, p. 1504).

Em 1908 (*Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 53), o matemático russo-alemão Hermann Minkowski (1864-1909) mostrou que as TL representavam uma espécie de "rotação" num espaço 4-dimensional (x, y, z, ict; i = $\sqrt{-1}$), com uma ***métrica*** (medida da distância entre dois pontos nesse espaço) definida por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2,$$

caracterizando o **Espaço de Minkowski** (EM).

Nesse EM, a ***posição***, a ***velocidade***, o ***momento linear***, a ***aceleração*** e a ***força*** são representados por 4-vetores e definidos pelas seguintes expressões (em notação atual):

$$r_\mu = (\vec{r}, ict)$$ **(4-vetor posição)**; [$\mu = 1,2,3,4; \vec{r}(x, y, z)$]

$$V_\mu = dr_\mu / d\tau = \gamma(d/dt)(\vec{r}, ict) = \gamma(\vec{v}, ic)$$ **(4-vetor aceleração)**;

$$P_\mu = m_0 V_\mu = m(\vec{v}, ic) = m_0\gamma(\vec{v}, ic) = (m\vec{v}, imc) = (\vec{p}, iE/c)$$ **(4-vetor momento)**;

$$A_\mu = d^2 r_\mu / d\tau^2 = dV_\mu / d\tau = \gamma(d/dt)[\gamma(\vec{v}, ic)]$$ **(4-vetor aceleração)**;

$$F_\mu = dP_\mu / d\tau = m_0 A_\mu = \gamma(d/dt)(\vec{p}, icm) = \gamma(\vec{f}, icdm/dt)$$ **(4-vetor força)** ($\vec{f} = d\vec{p}/dt$),

sendo m_0 a ***massa de repouso*** e τ o ***tempo próprio***, ambos medidos em um referencial inercial em repouso, e $E = \gamma m_0 c^2 = mc^2$.

ANTERIOR SEGUINTE