



CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo

www.bassalo.com.br

Newton e as Leis de Kepler.

Para mim, e, provavelmente, para alguns leitores, devido à interpretação equivocada de leituras realizadas em alguns livros didáticos e de divulgação científica (inclusive os meus primeiros artigos), parecia um fato histórico inquestionável que o físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) havia demonstrado as **Leis de Kepler** usando um novo método matemático, o **método das fluxões** (hoje conhecido como Cálculo Diferencial), que ele próprio havia criado. Contudo, isso não é verdade, conforme mostraremos neste verbete. Antes, faremos uma revisão histórica daquelas Leis.

Segundo vimos em verbetes desta série, entre 151-157 de nossa Era Cristã, o astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (85-165) retomou e sistematizou os modelos planetários geocêntricos, tais como o das **esferas homocêntricas**, formulado pelos astrônomos gregos Eudoxo de Cnido (c.408-c.355) e Calipo de Cízico (c.370-c.300), e o do **epiciclo-deferente-excêntrico-equante** que havia sido desenvolvido pelos gregos, o matemático Apolônio de Perga (c.261-c.190) e o astrônomo Hiparco de Nicéia (c.190-c.120). Essa sistematização foi apresentada por Ptolomeu em seu célebre **Hè Mathèmatikè Syntaxis (A Compilação Matemática)**, para poder explicar o movimento dos planetas e suas irregularidades. Essa obra, composta de 13 livros, foi traduzida por volta do Século 9, pelos árabes, recebendo então o nome de **Almagest**, que é uma corruptela do nome hispano-árabe **Al-Magisti (O Grande Tratado)**. [Cláudio Ptolomeu, **Great Books of the Western World 15** (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1993)].

O **modelo geocêntrico de Ptolomeu** permaneceu aceito por muitos séculos até ser questionado e rejeitado pelo padre e astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1453-1543) no famoso livro **De Revolutionibus Orbium Coelestium (Das Revoluções dos Corpos Celestes)** [**Great Books of the Western World 15** (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1993)], publicado em 1543, no qual consolidou o **modelo heliocêntrico** para o nosso sistema planetário, cuja primeira formulação fora apresentada pelo astrônomo grego Aristarco de Samos (c.320-c.250).

O **modelo heliocêntrico de Copérnico** teve seguidores e opositores e, dentre estes, destaca-se o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Ao observar que os planetas giravam em torno do Sol e, mais ainda, a não observação das paralaxes estelares, indicando este fato uma imobilidade da Terra, Tycho Brahe formulou o seu próprio modelo, segundo o qual os planetas giravam em torno do Sol, e este, juntamente com a Lua e o céu das estrelas fixas, giravam em torno da Terra imóvel. Apesar dessa visão equivocada do sistema solar, Tycho Brahe deu grandes contribuições à Astronomia, principalmente com as observações sobre as órbitas dos planetas, destacando-se as observações do planeta Marte. [Carl Sagan, **Cosmos** (Francisco Alves, 1982)].

Dentre os seguidores de Copérnico, encontrava-se o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) que, ao aprender sobre o heliocentrismo copernicano de seu mestre, o astrônomo alemão Michael Maestlin (1550-1631), procurou uma demonstração matemática para o mesmo, uma vez que era um profundo conhecedor de toda a obra do grande matemático grego Euclides de Alexandria (323-285), reunida no famoso livro intitulado **Elementos**, no qual ele estudou a Geometria [**Great Books of the Western World 10** (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1993)].

Usando o modelo copernicano, com o Sol em seu centro, Kepler colocou nos espaços entre as esferas que continham os seis (6) planetas então conhecidos (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno) os cinco (5) sólidos perfeitos platônicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), cada um encaixado dentro do seguinte. Assim, dispondo os sólidos na ordem correta, os

diâmetros das esferas acabariam por apresentar quase as mesmas proporções que as órbitas dos planetas. Esse primeiro modelo planetário de Kepler foi publicado no livro de nome **Mysterium Cosmographicum** (*Mistério Cosmográfico*), editado em 1596



(Google Imagens)

Ao receber esse livro das mãos de Kepler, Tycho Brahe ficou impressionado com o seu conteúdo matemático, muito embora não concordasse com o modelo heliocêntrico ali apresentado. Mesmo assim, convidou-o a trabalhar com ele em Praga, onde morava. Ao chegar nessa cidade, em janeiro de 1600, Kepler recebeu de Tycho a tarefa de calcular a órbita de Marte. Ao analisar as observações que Tycho fizera desse planeta, pensou que em pouco tempo encontraria a forma da órbita marciana. No entanto, foram necessários anos de árduo trabalho para encontrá-la, conforme veremos a seguir, e cujos detalhes podem ser encontrados, em vários textos, como, por exemplo: Arthur Koestler, **O Homem e o Universo** (IBRASA, 1989); Ronaldo Rogério de Freitas Mourão, **Kepler: A Descoberta das Leis do Movimento Planetário** (Odysseus, 2003); Stephen Hawking, **Os Gênios da Ciência: Sobre os Ombros de Gigantes** (Elsevier/Campus, 2005); Marcelo Gleiser, **A Harmonia do Mundo** (Companhia das Letras, 2006).

Em substituição a Tycho Brahe, que morreu subitamente em 24 de outubro de 1601, Kepler conseguiu, em 1602, ser designado **Matemático Imperial** de Rodolfo II (1552-1612), Rei da Hungria e Boêmia e Imperador do Sacro Império Romano, com sede em Praga. Em vista disso, e com alguma dificuldade, Kepler conseguiu dos herdeiros de Tycho os preciosos dados que este havia coletado sobre o sistema planetário, primeiro no *Observatório Uraniborg*, na ilha de Hven (hoje, Ven) na Dinamarca, e depois em Praga. Uma primeira análise das observações tychobraheanas levou Kepler, logo em 1602, a enunciar a hoje conhecida:

Lei das Áreas (1602): *O raio vetor ligando um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.*

Por outro lado, as observações da órbita de Marte realizadas por Tycho indicavam que quanto mais afastado esse planeta se encontrava do Sol, mais lento era seu movimento e, portanto, menor era sua velocidade, além de indicar, também, uma pequena excentricidade em sua órbita. Em vista disso, Kepler tentou, inicialmente, uma série de combinações de círculos para a órbita marciana. Porém, como encontrou uma diferença de oito minutos ($8'$) de arco e achando que seu mestre Tycho não cometeria tal erro, passou a experimentar órbitas ovaladas, depois de considerar, sem êxito, que cada esfera característica de um planeta era na realidade uma carapaça esférica de espessura suficiente que pudesse explicar a excentricidade orbital. Depois de realizar setenta (70) tentativas para ajustar os dados de Brahe aos do **modelo de Copérnico** e do próprio Brahe, Kepler chegou finalmente à **órbita elíptica**. Registre-se que a ideia desse tipo de órbita já havia sido sugerida pelo astrônomo árabe-espanhol Azarquiel (Al-Zarqāli) de Toledo (c.1029-1100), em 1081, para explicar a órbita de Mercúrio. Assim, no livro intitulado **Astronomia Nova, seu Physica Coelestis** (*Astronomia Nova ou Física Celeste*), publicado em 1609, além de enunciar a sua **Lei das Áreas**, de 1602, conforme vimos, Kepler enunciou, também, a:

Lei das Órbitas (1609): *Os planetas se deslocam em torno do Sol em órbitas elípticas, tendo o Sol como um dos focos.*

Havendo descoberto as leis que regem os movimentos dos planetas, partiu Kepler para determinar a relação entre as distâncias e os períodos dos mesmos. Depois de realizar algumas tentativas relacionando potências das distâncias e dos períodos planetários, Kepler chegou finalmente à sua terceira lei, apresentada no livro **Harmonice Mundi** (*Harmonia do Mundo*) [**Great Books of the Western World 15** (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1993)], publicado em 1619, e com o seguinte enunciado:

Lei dos Períodos (1619): *A relação entre o quadrado do período (P) de revolução dos planetas e o cubo de sua distância média (\bar{R}) ao Sol é uma constante: $P^2 / \bar{R}^3 = \text{Cte.}$*

O último trabalho de Kepler foi o livro **Tabulae Rudolphinae** (*Tabelas Rodolfinas*), editado em 1627, em homenagem ao seu antigo protetor, o Imperador Rodolfo II, e dedicado à memória de Tycho Brahe. Esse livro, que contém as observações de Tycho e do próprio Kepler sobre os movimentos planetários, foi durante um século um clássico e, para a sua confecção, ele utilizou um novo método de cálculo matemático, os **logaritmos** (vide verbete nesta série), que havia sido inventado pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), em 1614.

A partir de agora trataremos de Newton. Nascido no dia 25 de dezembro de 1642, em Woolsthorpe, perto da aldeia de Colsterworth, cerca de 11 km ao sul de Grantham, em Lincolnshire, na Inglaterra, filho de uma pequena família de pequenos fazendeiros e órfão de pai aos dois meses de idade, a Newton estava destinado seguir a profissão agrícola. No entanto, na *Escola Real de Grantham* foi um garoto estranho, pois seu interesse maior era pelos instrumentos mecânicos por ele mesmo construídos. O diretor dessa Escola e mais o seu tio materno, o Reverendo William Ayscough, que era membro do *Trinity College*, em Cambridge, convenceram sua mãe de que seu filho deveria cursar aquela Universidade, aonde chegou em 05 de junho de 1661, obtendo aí o grau de Bacharel em Letras, sem distinção, em 1665. Contudo, quando se preparava para defender o Mestrado, teve que abandonar por dois anos (1665-1666) Cambridge e voltar para Woolsthorpe, devido à peste bubônica que então grassava em Londres. Foi durante esse período que Newton elaborou os fundamentos de sua obra em Matemática, Óptica e Astronomia. [Sobre mais detalhes da vida de Newton, ver: Richard S. Westfall, **A Vida de Isaac Newton** (Nova Fronteira, 1995); David Berlinski, **O Dom de Newton: como Sir Isaac Newton desvendou o sistema do mundo** (Globo, 2002); Eduardo de Campos Valadares, **Newton: a órbita da Terra em um copo d'água** (Odysseus, 2003)].

Segundo sua própria afirmação (Westfall, op. cit.), Newton inventou os **métodos direto e indireto das fluxões**, entre novembro de 1665 e maio de 1666. Muito embora essa nova técnica matemática fosse o modo natural de lidar com grandezas variáveis, como as que ocorrem, por exemplo, no caso das velocidades variáveis dos planetas, conforme indica a **Lei das Áreas** de Kepler, Newton não usou aquela nova técnica para chegar à **Lei da Gravitação Universal**; ele usou, basicamente, a **Lei dos Períodos** de Kepler, ainda segundo suas próprias palavras (Westfall, op. cit.): - ... *no mesmo ano (1666), comecei a pensar na gravidade como se estendendo até a órbita da Lua e (depois de descobrir como calcular a força com que um globo girando dentro de uma esfera pressiona a superfície da esfera) a partir da regra de Kepler de que os períodos dos planetas estão numa proporção sesquiáltera com suas distâncias do centro de suas órbitas, deduzi que as forças que mantêm os planetas em suas órbitas devem variar, reciprocamente, com o quadrado de sua distância do centro em torno do qual eles giram: e a partir disso, comparei a força necessária para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra, e descobri que elas se correspondem bem de perto.*

Esses primeiros cálculos realizados por Newton permitiram-lhe pensar na hipótese de uma lei universal regendo o movimento dos planetas em torno do Sol. No entanto, havia muito trabalho a ser realizado para que essa hipótese se transformasse em realidade. Com efeito, no começo da década de

1680 um grupo de físicos estava firmemente interessado no desenvolvimento das novas ciências matemático-experimentais; eles então se reuniam para relatar suas pesquisas e propor novos problemas. Assim é que para esse grupo de físicos, os ingleses Jeremiah Horrocks (1619-1641), Robert Hooke (1635-1703), Sir Christopher Wren (1632-1723) (o construtor da Catedral de São Paulo), Edmund Halley (1656-1742) e o holandês Christiaan Huygens (1629-1695), dentre os problemas que discutiam, um deles era bastante intrigante: - *Que tipo de força leva um planeta a descrever uma órbita elíptica em torno do Sol?*

Apesar de Kepler haver sugerido que uma força do tipo magnética (*anima motrix*) e inversamente linear, emanada do Sol, era a responsável pelo movimento planetário, essa hipótese não foi aceita pelos físicos referidos acima. Assim, numa reunião da *Royal Society of London for the Promotion of Natural Knowledge* (criada em 1660), em janeiro de 1684, Halley chegou à conclusão de que a força que atua sobre os planetas variava na razão inversa do quadrado da distância, porém não foi capaz de deduzir dessa hipótese as **Leis de Kepler**, principalmente a **Lei das Órbitas**. Em fevereiro de 1684 Halley, Sir Wren e Hooke se encontraram e concordaram com a tal hipótese. Hooke chegou a afirmar, nessa ocasião, que já a havia considerado e que demonstrara com a mesma todas as leis do movimento celeste. Em vista disso, Sir Wren ofereceu um prêmio para que Hooke, Halley ou qualquer outro físico escrevesse um livro sobre tão interessante tema.

Como esse livro não foi escrito, em agosto de 1684, Halley resolveu ir até Cambridge e consultar Newton. Ao perguntar-lhe sobre qual a curva descrita pelos planetas sob a ação de uma força do tipo inverso do quadrado da distância, recebeu de Newton a resposta imediata de que a mesma *era uma elipse*, pois já a havia demonstrado, porém não conseguiu, naquele momento, encontrar tal demonstração, mas prometeu enviá-la depois para Halley.

Estimulado pela visita de Halley, Newton retomou os cálculos que fizera antes das órbitas dos planetas há quase 20 anos. Assim, no outono de 1684, Newton apresentou uma série de conferências na *Universidade de Cambridge*, nas quais foram abordadas suas ideias sobre o movimento dos corpos em geral, sobre os conceitos de força, de massa, de tempo, bem como sua famosa **Lei da Gravitação Universal**. Em novembro de 1684, Newton enviou para Halley um pequeno trabalho intitulado **De motu corporum in gyrum** (*Do movimento dos corpos em uma órbita*), reunindo aquelas conferências e cumprindo a promessa que lhe fizera em agosto desse mesmo ano. Nesse pequeno trabalho de nove (9) páginas, Newton havia demonstrado que uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância implicava uma órbita cônica (elipse) para velocidades abaixo de certo limite (Westfall, op. cit.).

Incentivado por Halley, Newton começou a expandir o **De motu** e, por volta de novembro de 1685, transformou-o em um tratado em dois volumes, ao qual deu o nome de **De motu corporum** (*Do movimento dos corpos*). Neste, há a demonstração de um resultado importante para sua **Teoria da Gravitação Universal**, qual seja, a de que a ação de uma esfera homogênea sobre uma partícula exterior é a mesma que seria se toda a massa dessa esfera estivesse concentrada em seu centro. Assim, para Newton, todas as partículas da vasta Terra combinar-se-iam para atrair tanto a maçã situada a alguns pés acima de sua superfície, quanto a Lua. É interessante destacar que, segundo a versão do político inglês John Conduit (1688-1737), marido de Catherine Barton (1679-1740), sobrinha de Newton, este teve a ideia da gravitação universal quando observou, em 1666, no pomar de sua casa em Lincolshire, a queda de uma maçã. Dessa observação, ocorreu-lhe a hipótese de que o poder da gravidade terrestre (que derrubara a maçã) não estava limitado a certa distância da Terra, mas deveria estender-se muito mais além do que costuma considerar e, quem sabe, até a Lua (Westfall, op. cit.).

Contudo, esse tratado só se transformou no famoso **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*) [**Great Books of the Western World 32** (Encyclopaedia Britannica, Inc./Chicago, 1993)], em 1687, depois que Newton estendeu o princípio da gravitação universal, inicialmente aplicado ao movimento da Lua, a todos os corpos celestes. O **Principia** é constituído de três Livros. No Livro I (Nova Stella/EDUSP, 1990), e logo em seu começo, há a formulação das famosas **Leis de Newton: Lei da Inércia, Lei da Força e Lei da Ação e Reação**. No Livro II, há o estudo dos movimentos dos corpos em meios resistentes e o da teoria de ondas. Ainda nesse Livro II, Newton demonstrou que, se os movimentos periódicos dos planetas se desenvolvessem nos

turbilhões (vórtices) de matéria fluida, segundo o modelo proposto pelo matemático e filósofo francês René du Perron Descartes (1596-1650), em 1644, esses movimentos não satisfaziam as **Leis de Kepler** (vide verbetes nesta série).

Por fim, no Livro III, Newton usou alguns resultados obtidos nos dois Livros anteriores, principalmente a **Lei da Gravitação Universal**, para demonstrar a *estrutura do sistema do mundo*. Assim, dentre as proposições demonstradas neste Livro III, destacam-se: a) a explicação do movimento kepleriano dos satélites da Terra, de Júpiter e de Saturno; b) o cálculo da forma da Terra (achatada nos polos e alongada no equador, exatamente o contrário previsto pelo modelo cartesiano); c) a explicação do fenômeno das marés (ação gravitacional conjunta do Sol e da Lua sobre as águas dos oceanos); d) e a precessão dos equinócios [observada pela primeira vez pelo astrônomo babilônio Kiddinu [floresceu cerca (f.c.) 397 a. C.] como sendo devida à diferença entre a força de gravitação do Sol e da Lua agindo no plano equatorial alongado da Terra (Principia, op. cit.).

Na conclusão deste verbete (cuja versão espanhola foi publicado em *Contactos* **31**, p. 33, 1999), vamos apresentar alguns comentários sobre as demonstrações geométricas realizadas por Newton das **Leis de Kepler**. Na demonstração da **Lei das Áreas**, Newton considerou que o movimento de um planeta em torno do Sol é o resultado de uma competição entre a tendência de o mesmo seguir em linha reta, com movimento uniforme, como se nenhuma força atuasse sobre ele (de acordo com a sua **Lei da Inércia**), e o movimento devido à força central de gravitação exercida pelo Sol. Desse modo, usando alguns teoremas da geometria plana, principalmente os relacionados com semelhanças e áreas de triângulos, chegou àquela demonstração. É oportuno observar que somente com a **Lei da Conservação do Momento Angular** proposta pelo físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), em 1776, se percebeu que a **Lei das Áreas** decorre imediatamente da conservação do momento angular do planeta em sua órbita. Hoje, o momento angular (\vec{L}) de um corpo de massa (m) com uma velocidade (\vec{v}) em torno de um ponto fixo, este caracterizado pelo vetor posição (\vec{r}), é definido por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ (vide verbete nesta série).

Por outro lado, a demonstração da **Lei das Órbitas** foi realizada por Newton em várias etapas, usando algumas propriedades geométricas das seções cônicas. Inicialmente, demonstrou que, quando um corpo se move em uma órbita elíptica sob a ação de uma **força centrípeta** (definida por ele no **Principia**) dirigida para o foco dessa cônica, essa força varia com o inverso do quadrado da distância. A seguir, provou que, se o corpo considerado acima se move em uma hipérbole ou parábola sob a ação de uma **força centrípeta** dirigida para o foco da cônica considerada, a mesma também varia com o inverso do quadrado da distância. Por último, demonstrou o teorema inverso, qual seja: se um corpo se move sujeito a uma **força centrípeta** que varia com o inverso do quadrado da distância, a trajetória do corpo tem que ser uma cônica: elipse, parábola ou hipérbole (lembrar que o círculo é uma elipse degenerada). É importante destacar que a hipótese de que a **força centrípeta** variava com o inverso do quadrado da distância, usada por Newton para demonstrar a **Lei das Órbitas**, conforme vimos acima, foi-lhe sugerida ao observar que a **Lei dos Períodos** se ajustava muito bem ao caso particular das órbitas circulares.

No fecho deste verbete, é interessante concluí-lo dizendo que o físico norte-americano Richard Philips Feynman (1918-1988; PNF, 1965), por não entender bem a demonstração da **Lei das Órbitas** realizada por Newton e referida acima, preparou uma outra demonstração geométrica da mesma, em 1964. Essa demonstração está magnificamente apresentada por David L. Goodstein e Judith R. Goodstein no livro intitulado **A Lição Esquecida de Feynman: o Movimento dos Planetas em Torno do Sol** (Gradiva, 1997). Este livro me foi indicado pelo físico brasileiro José Acacio de Barros, e um exemplar do mesmo me foi ofertado pelo físico brasileiro Vítor Façanha Serra. A eles, meu eterno agradecimento.



[ANTERIOR](#)

[SEGUINTE](#)