José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

Pêndulos: Simples e Composto.

Conforme vimos em verbetes desta série, são bem conhecidas as histórias sobre as experiências que levaram o astrônomo e físico italiano Galileu Galilei (1564-1642) à descoberta das **leis do pêndulo** e das ***leis da queda livre***. Nos dois casos, não há uma data precisa quando ele foi motivado a realizar experiências que o levaram à formulação daquelas leis. Essa imprecisão, segundo o físico e historiador da ciência, o norte-americano Tony Rothman (n.1953), em seu livro **Tudo é Relativo e Outras Fábulas da Ciência e Tecnologia** (DIFEL, 2005), decorre do fato de que tais histórias não foram registradas por Galileu em nenhum de seus livros, e sim, que elas foram descritas por seu discípulo, o físico italiano Vincenzio Viviani (1622-1703), em um livro inacabado que escreveu sobre a vida de seu mestre. Como Viviani era um perfeccionista, levou cinquenta anos, vendo e revendo o que escrevia, sem concluí-lo. Morreu sem vê-lo publicado, o que só aconteceu em 1717. Em vista disso, historiadores da ciência apresentam datas e versões diferentes sobre a motivação da formulação daquelas leis. No caso das **leis do pêndulo**, foi em 1581 [segundo o químico e historiador da ciência, o russo-norte-americano Isaac Asimov (1920-1992) em **Gênios da Humanidade** (Bloch Editores, 1972)], ou em 1583 [segundo os historiadores da ciência, o norte-americano James Reston, Jr., no livro **Galileu: Uma Vida** (José Olympio, 1995) e o italiano Ludovico Geymonat, no livro **Galileu Galilei** (Nova Fronteira, 1997)], que Galileu foi levado a descobri-las ao observar, quando assistia à missa na Catedral de Pisa, que o período de oscilações de um candelabro (lanterna decorativa), colocado em movimento pelo vento, não dependia do fato de que tais oscilações fossem rápidas ou lentas. Ele comparou os períodos dessas oscilações contando sua própria pulsação. Registre-se que esse isocronismo já havia sido observado, no século X, pelo astrônomo árabe Ibn Junis, conforme salienta Geymonat.

Estimulado ou não por essa observação, o fato é que Galileu realizou experiências com **pêndulos** de diversos comprimentos de corda e diferentes pesos. Nelas, percebeu que as oscilações desses **pêndulos**, embora de amplitudes (ângulo entre o fio na posição vertical e na da distância máxima alcançada na oscilação) diferentes, sempre levam o mesmo tempo na oscilação completa (ida e volta), conforme comunicou ao marquês italiano Guidobaldo del Monte (1545-1607), em carta que escreveu no dia 29 de novembro de 1602, segundo seus biógrafos: Stillman Drake (**Galileu**, Publicações Dom Quixote, 1981) e Cortes Pla (**Galileo Galilei**, Espasa-Calpe Argentina, S. A., 1946). Note que, em 1644, o matemático e filósofo, o padre franciscano francês Marin Mersenne (1588-1648) observou que o período de um **pêndulo** é independente de sua amplitude, confirmando assim a observação de Galileu; logo depois, em 1646, Mersenne tratou pela primeira vez da determinação da duração de oscilação de figuras planas.

A formulação correta das **leis do pêndulo simples**, só foi apresentada pelo físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695), em 1659, ao demonstrar matematicamente que a trajetória cicloidal é a que torna o ***período do pêndulo*** independente de sua amplitude. Com isso, determinou a relação entre o tempo de queda de um corpo ao longo de uma ciclóide (curva gerada por um ponto situado sobre um círculo que se desloca ao longo de uma linha reta) e o tempo de sua queda ao longo do diâmetro do círculo gerador da ciclóide. De posse dessa relação, obteve pela primeira vez a expressão para o período T (metade do tempo de uma oscilação completa) de um **pêndulo simples**: $T = \pi\sqrt{\ell/g}$ e, de posse dessa expressão, determinou o valor da aceleração da gravidade, ou seja: g = 9,806 m/s^2. Nessa experiência, usou um pêndulo de comprimento ℓ = 6,18 polegadas e com 4.964 oscilações duplas por hora. [Ernst Mach, **The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development** (The Open Court Publishing Company, 1974); Alexandre Koyré, **Estudos da História do Pensamento Científico** (EUnB/Forense-Universitária, 1982)].

Em 1673, Huygens publicou seu famoso livro **Horologium Oscillatorium, sive De Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometricae** ("O Relógio de Pêndulo, ou Demonstrações Geométricas Concernentes ao Movimento do Pêndulo Igualmente Aplicado aos Relógios"), no qual investigou a Mecânica de corpos não-pontuais, principalmente as leis que regem o movimento do **pêndulo composto** (**pêndulo físico**), leis essas baseadas na definição:

O centro de oscilação ("centrum oscillationes") de qualquer figura é o ponto situado na sua linha de gravidade e cuja distância do ponto de suspensão é igual ao comprimento do pêndulo simples que tem o mesmo tempo de vibração que a figura.

Partindo dessa definição, Huygens demonstrou importantes resultados para o entendimento da hoje conhecida **Mecânica Rotacional**. Por exemplo, ao definir como "comprimento reduzido do pêndulo físico" a distância (R) do centro de oscilação ao ponto de suspensão de um **pêndulo físico**, Huygens demonstrou que (na notação atual):

$$R = \sum_i m_i r_i^2 / \sum_i m_i r_i ,$$

onde m_i representa a massa de uma partícula (ou parte homogênea) constituinte do **pêndulo**, e r_i a sua distância ao ponto de suspensão; este, segundo Huygens, é permutável com o centro de oscilação. Ainda naquele livro [cujos excertos podem ser vistos em: William Francis Magie, **A Source Book in Physics** (McGraw-Hill Book Company, 1935)], Huygens demonstrou que:

Sempre que um número qualquer de corpos pesados é posto em movimento sob a ação de seu próprio peso, o seu centro comum de gravidade não pode subir a um plano mais alto do que aquele em que se achava no início do movimento.

É interessante registrar que o físico inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) em seu livro **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural"), publicado em 1687, tratou do movimento de certos sistemas massivos que poderiam ser reduzidos ao efeito de uma massa pontual sujeita a uma força central, como ocorre, por exemplo, na atração gravitacional de dois corpos massivos.

O problema da determinação do centro de oscilação de um **pêndulo composto** também foi objeto de pesquisa por parte dos matemáticos, os irmãos suíços Bernoulli [James (Jakob, Jacques) (1654-1705) e John (Johann, Jean) (1667-1748)] e o inglês Brook Taylor (1685-1731). Com efeito, em 1686, James publicou seu primeiro trabalho sobre o centro de oscilação, usando o princípio estático da alavanca e o ***princípio das acelerações reversas*** (mais tarde, em 1743, conhecido como ***princípio de d´Alembert***) considerando estas como forças. No entanto, em 1690, o matemático francês, o Marquês Guillaume François Antoine de l´Hôpital (1661-1704) apontou alguns erros nesse trabalho de James, como, por exemplo, que este tomara as velocidades em intervalos infinitamente pequenos em vez de tempos finitos. Logo em seguida, em 1691, James corrigiu esses erros e, em 1703, apresentou sua teoria final do centro de oscilação. Por sua vez, em 1708, Taylor estudou a determinação do centro de oscilação do **pêndulo composto**, ao considerar separadamente as forças e as massas envolvidas nesse problema. Como John usara, em 1712, esse mesmo argumento, Taylor resolveu apresentá-lo em seu famoso livro **Methodus Incrementorum Directa et Inversa** ("Métodos Direto e Inverso de Incrementações"), publicado em 1715, no qual, aliás, ele apresentou sua famosa fórmula para o desenvolvimento em série de uma função, mais tarde conhecida como ***série de Taylor***. [Clifford Ambrose Truesdell III, **Essays in the History of Mechanics** (Springer-Verlag, 1698); Mach, op., cit.].

É oportuno destacar que, em 1739, o físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) foi um dos primeiros a resolver a equação diferencial do **pêndulo simples** (uma pequena massa m ligada a um fio inextensível) com oscilações angulares pequenas e com frequência própria ω_0; essa equação e sua solução são hoje traduzidas pelas expressões:

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = A\,\cos(\omega_0 t + \theta),$$

onde A e θ são constantes determinadas pela posição e velocidade iniciais do pêndulo. Ainda nesse trabalho, ao estudar o movimento de um **pêndulo simples** sob a ação de um balanço externo de frequência ω_e, Euler redescobriu o fenômeno da ***ressonância*** ao observar que quando ω_e se aproxima de ω_0, as oscilações forçadas do pêndulo tornam-se cada vez maiores e suas amplitudes tendem para o infinito. Ele também, naquele mesmo trabalho, estudou as oscilações do **pêndulo simples** em meios resistentes. Na linguagem atual, esse estudo corresponde ao ***movimento amortecido de um pêndulo simples***. Também é interessante destacar que John Bernoulli, antes, em 1728, havia encontrado uma solução senoidal para as oscilações fundamentais de uma corda vibrante sem peso, carregada de n massas iguais e igualmente espaçadas, pois elas satisfazem a uma equação diferencial análoga à do **pêndulo simples**. Um estudo mais detalhado dos **pêndulos** pode ser visto em: José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Osciladores Harmônicos: Clássicos e Quânticos** (Livraria da Física, 2009).

ANTERIOR SEGUINTE