José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

O Número Imaginário (√-1), as Variáveis Complexas e seus Papéis na Matemática e na Física.

No livro do matemático e lógico brasileiro Newton Carneiro Affonso da Costa (n.1929) intitulado **O Conhecimento Científico** (Discurso Editorial/FAPESP, 1997), há a reprodução de um comentário feito pelo filósofo francês Léon Brunschvicg (1869-1944) em seu texto **Les étapes de la philosophie mathématique** (Alcan/Paris, 1912; Presses Universitaires, 1947), sobre o matemático francês, o Barão Augustine Louis Cauchy (1789-1857) e seu trabalho sobre as **variáveis complexas**. Eis o comentário (destaques meus): - *Entre 1820 e 1830, Cauchy publicou os trabalhos sobre variáveis imaginárias que lhe valeram, ao mesmo tempo, tanta glória e tantos insultos. Como teve a audácia de basear suas investigações sobre o signo* $\sqrt{-\mathbf{1}}$, *escreveu-se de Cauchy*: - ‘*Que não devia ter consciência do que fazia; que suas invenções eram bobagens integrais e absurdas; e, enfim, que tais loucuras eram capazes de descarrilar os espíritos*’. *Agora, são justamente esses trabalhos de Cauchy, tão cruelmente ridicularizados, que serviram mais tarde a Maxwell* [físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879)] *para sua teoria sobre a identidade de transmissão entre a eletricidade, a luz e o calor; são os trabalhos de Maxwell e de Cauchy que ocasionaram as experiências de Hertz* [físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)] *sobre as ondas eletromagnéticas. Poder-se-ia desejar contestação mais completa?*. Sobre os trabalhos de Maxwell e de Hertz, falaremos mais adiante.

Para entender esse comentário de Brunschvicg, vejamos como apareceu o $\sqrt{-\mathbf{1}}$ e seu papel na Matemática e na Física. Para isso, usaremos os seguintes textos: Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (John Wiley and Sons, 1968); Dirk Jan Struik (Editor), **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969); Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient and Modern Times** (Oxford University Press, 1972); José Maria Filardo Bassalo, **Crônicas da Física 5** (EDUFPA, 1998); e Paul J. Nahin, **An Imaginary Tale: The Story of √-1** (Princeton University Press, 2007).

Segundo Nahin [opus citatus (op. cit.)], a saga do $\sqrt{-\mathbf{1}}$ começa quando dois irmãos, os famosos ladrões Ahmed e Mohammed Abd er-Rassul, em 1878, tropeçaram em um rolo de papiro em um antigo cemitério egípcio no *Wadi el-Muluk* (“Vale dos Reis”), no templo da Rainha Hatsheput, que reinou o Egito, entre c.1472-1458. Um desses irmãos vendeu, em 1893, esse papiro ao egiptologista russo Vladimir Semenovich Golenishchev (1856-1947) que, por sua vez, em 1912, doou ao *Museu de Belas-Artes*, de Moscou. Nesse papiro, há o cálculo do volume (V) de uma pirâmide truncada quadrada (*frustum*), de altura (h), sendo a o lado da base maior e b, o lado da base menor, e dada pela expressão (em notação atual): $V = (h/3)\ (a^2 + ab + b^2)$. Como os antigos egípcios chegaram a essa fórmula é uma questão ainda não totalmente conhecida, uma vez que sua dedução depende do conhecimento do cálculo integral. Outra questão intrigante com relação ao *frustum* era como medir sua altura (h), pois, embora a e b possam ser medidos diretamente, h só pode ser medido indiretamente por intermédio de Geometria e de Trigonometria. Ora, dirá o leitor, se for conhecido V, um cálculo simples mostra que a altura é dada por: $h = 3\ V/(a^2 + ab + b^2)$. O problema é conhecer o valor exato de V. É claro que os egípcios antigos certamente possuíam artifícios para calcular valores aproximados de h como, por exemplo, fazendo um andaime até o topo do *frustum* e usando um fio de prumo, seu comprimento seria aproximadamente h.

Parece que o cálculo exato de h só foi realizado pelo matemático e inventor grego-egipcio Heron de Alexandria (c.10 - 70), pois em seu livro **Stereometrica** escreveu que (em notação atual):

$h = \sqrt{c^2 - 2[(a-b)/2]^2}$, onde c é a aresta do *frustum*. Ainda segundo Nahin (op. cit.), é nesse livro que aparece, pela primeira vez, o $\sqrt{-1}$(essa notação só apareceu muito mais tarde, no Século 17, como veremos adiante). Com efeito, Heron considerou, nesse seu livro, uma pirâmide quadrada truncada com os seguintes valores: a = 28, b = 4 e c = 15, e levando em sua fórmula, obteve: $h = \sqrt{15^2 - 2[(28-4)/2]^2} = \sqrt{225-144-144} = \sqrt{-63} = \sqrt{-1}\sqrt{63}$. No entanto Heron escreveu que: $h = \sqrt{63}$, ou seja, ele considerou que: $\sqrt{-1}$= 1. É interessante registrar que o matemático norte-americano Wooster Woodruff Beman (1850-1922), por ocasião de uma reunião da *Sociedade Americana para o Progresso da Ciência*, realizado em 1897, ao tratar dessa questão afirmou que esse erro crasso cometido por Heron ou por algum copista, nunca será conhecido.

Um novo aparecimento de $\sqrt{-1}$ ocorre com as equações algébricas quadráticas estudadas pelo matemático alexandrino-grego Diophantus de Alexandria (c.200/214-c.284/298) que, no livro 6 de seu tratado **Arithmetica**, ao trabalhar com o ***Teorema de Pitágoras*** (TP), afirmou que conhecida a área (7) de um triângulo retângulo cujo perímetro vale 12, então os lados são solução da equação quadrática (em notação atual): 172 x = 336 x^2 + 24 → 84 x^2 – 43 x + 6 = 0, que é obtida chamando um lado de 1/x, o outro será 14x, e aplicando o TP para obter o perímetro 12. Em seus métodos de resolver equações algébricas, Diophantus apenas escreveu que essa equação não tinha solução racional, pois ele havia demonstrado que para uma equação quadrática do tipo, $ax^2 + bx + c = 0$, apresentar uma solução racional, deve acontecer que $(b/2)^2 - (ac)$ seja um quadrado perfeito, isto é, o que hoje é conhecido como ***discriminante*** Δ (= $b^2 - 4ac$) seja positivo: Δ > 0. Ora, para a equação acima, tem-se: $43^2 - (4)(84)(6) = -167 < 0$. No entanto, Diophantus não trabalhou nem com $\sqrt{-1}$ e nem com soluções negativas de suas equações (conhecidas como ***equações diofantinas***), embora tenha usado notação algébrica e reconhecido as frações como números e, portanto, considerou que os números racionais poderiam ser coeficientes e soluções de suas equações algébricas. É célebre sua afirmação de que a equação definida por: 4x + 20 = 0 é um absurdo, pois a solução dessa equação seria x = -5. (en.wikipedia.org/wiki/Diophantus).

Os valores positivos e negativos da solução de uma ***equação diofantina quadrática*** só foram considerados pelos matemáticos indianos como, por exemplo, Mahavira (Mahaviracarya) (f.c. 850) e Bhaskara (Bhaskaracarya) (1114-1185). Com efeito, Mahavira afirmou que o quadrado de números positivos ou negativos são sempre positivos e, portanto, a raiz quadrada de tais números pode ser positiva ou negativa (p.e. $\sqrt{4} = \pm 2$); ele, no entanto, afirmou que não existia a raiz quadrada de números negativos. Bhaskara, por sua vez, além de admitir que as equações quadráticas do tipo, $ax^2 + bx + c = 0$, pudessem ter duas soluções, não trabalhou com raiz quadrada de números negativos. Outro fato interessante é que esses matemáticos indianos não usavam letras em suas expressões, eles apenas expressavam em palavras suas afirmativas. Por exemplo, Bhaskara escreveu que: - *A soma de dois números irracionais é maior que um número irracional*. Em linguagem atual, um exemplo dessa afirmativa pode ser escrita na seguinte forma: $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3+12) + 2\sqrt{3.12}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (Morris, op. cit.). É também de Bhaskara, a célebre expressão, escrita em notação atual: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(1/2)(a + \sqrt{a^2 - b})} \pm \sqrt{(1/2)(a - \sqrt{a^2 - b})}$ que, só tinha significado para ele se $a^2 > b$; em caso contrário, teríamos uma raiz quadrada de número negativo. É oportuno destacar que a célebre solução de uma equação quadrática vista acima, dada por: x = $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$/2a, conhecida, parece que somente no Brasil, como ***fórmula de Bhaskara***, nunca foi obtida por ele. Note que Bhaskara, em 1150, escreveu o livro **Siddhãnta Siromani** ("Diadema de um Sistema Astronômico"), com os capítulos: **Lilãvati** ("O Belo"), que trata de Aritmética, e **Vija-ganita** ("Extração de Raiz"), que trata principalmente da Álgebra. Ainda naquele livro, Bhaskara tratou da Trigonometria, deduzindo as fórmulas: sen (a ± b) = sen a cos b ± sen b cos a. (http://ecalculo.if.usp.br/historia/bhaskara.htm). É interessante destacar que a Álgebra (tradução latina da palavra árabe *Al-jabr*) foi desenvolvida pelo astrônomo e matemático árabe Abu Ja´far Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (c.780-c.850), no livro intitulado **Ilm Al-jabr w´al Muqâbalah** ("A Ciência da Transposição e da Supressão"), escrito em 830.

O $\sqrt{-1}$ voltou a aparecer na solução de equações cúbicas, representadas por: $x^3 + m\,x = n$ e $x^3 + m\,x^2 = n$. Essas equações foram estudadas por italianos, como o matemático e monge Luca Pacioli (c.1445-c.1514), em seu livro intitulado **Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita** ("O Melhor da Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidades"), publicado em 1494. Por sua vez, o matemático Scipione del (dal) Ferro (1465-1526) resolveu a equação acima, por volta de 1500, sem publicação oficial, apenas divulgada, por volta de 1510, em conversas com outros matemáticos, como Antonio Maria Fior (f.c. primeira metade do Século 16) e com Annibale della Nave (c.1500-1558), genro de del Ferro. O matemático Niccoló Fontana de Brescia (Tartaglia) (c.1500-1557), por volta de 1535, também estudou aquelas equações instigado por Fior. Por fim, essas soluções foram apresentadas pelo matemático, físico, filósofo e médico Ge(i)rolamo Cardano (Jerome Cardan) (1501-1576), em seu livro **Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus** ("Livro único da grande arte, ou das regras algébricas"), conhecido como **Ars magna** e publicado em 1545. Neste livro (que foi a causa de uma grande polêmica com Tartaglia, como vimos em verbete desta série), chegou a encontrar soluções de equações cúbicas (x^3 + ...) e quárticas (x^4 + ...), contendo o $\sqrt{-1}$. Por exemplo, no **Ars magna**, Cardano resolveu a equação $x^3 = p\,x + q$ e mostrou que suas três soluções dependem do termo $\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$ e que envolve o $\sqrt{-1}$ se o radicando for negativo; esses números envolvendo raízes negativas foram denominados por Cardano de ***fictícios***. É interessante destacar que o engenheiro-arquiteto italiano Rafael Bombelli (1526-1572), em seu livro denominado **Algebra**, de 1572, encontrou que as soluções da equação $x^3 = 15\,x + 4$, valem: 4 e $-2 \pm \sqrt{3}$. Contudo, usando a ***fórmula de Cardano*** referida acima, tais soluções dependem de $\sqrt{-1}$, em decorrência do termo $\sqrt{(4/2)^2-(15/3)^3}$ = $\sqrt{4-125}=\sqrt{-121}=\sqrt{-1}\sqrt{121}$. Note-se que Bombelli encontrou as soluções indicadas acima usando artifícios envolvendo divisão e fatoração e, de certo modo, deu uma interpretação para $\sqrt{-1}$. Também o matemático francês François Viète (1540-1603), que foi o primeiro a usar letras nas ***equações diofantinas*** e propor os símbolos {}, [] e (), encontrou soluções da equação cúbica referida acima usando funções trigonométricas.

O $\sqrt{-1}$ tomou um novo rumo no Século 17. Vejamos qual. O físico, matemático e filósofo francês René Du Perron Descartes (1596-1650) em seu famoso livro **Discours de la Méthode** ("Discurso do Método"), de 1637, incluiu um apêndice intitulado **La Géométrie** [René Descartes, **Great Books of the Western World 28** (Encyclopaedia Britannica, Inc., 1993)], no qual tratou das equações algébricas, principalmente a equação do tipo: $z^2 = A\,z - B^2$, com A e B^2 não-negativos, cuja solução geométrica que encontrou foi: $z=(A/2)\pm\sqrt{(A/2)^2-B^2}$. É fácil ver que essa solução recai na suposta ***fórmula de Bhaskara***, considerando-se nesta a seguinte correspondência: a = 1, b = - A e c = B^2 → z = ($A\pm\sqrt{A^2-4\times1\times B^2}$)/2 = $(A/2)\pm\sqrt{(A/2)^2-B^2}$. Desse modo, Descartes observou que se B > A/2, então não existe solução para a equação dada e, ao valor do radicando [$\sqrt{-1}\times\sqrt{B^2-(A/2)^2}$] ele deu o nome de ***imaginário***. É interessante destacar que foi Descartes quem inventou o símbolo $\sqrt{\ }$ para representar a raiz quadrada de um número; para a raiz cúbica, ele usou $\sqrt{c.\_}$. Destaque-se, também, que uma primeira tentativa de representação gráfica do ***número imaginário*** ($\sqrt{-1}$) foi proposta pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703), em seu **Treatise of Algebra** ("Tratado de Álgebra"), publicado em 1685.

No começo do Século 18, com o desenvolvimento da Trigonometria (vide verbete nesta série), o $\sqrt{-1}$ voltou a ser destaque graças ao trabalho do matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) que, em 1707 (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **25**, p. 2368), demonstrou geometricamente a hoje famosa ***fórmula de Moivre***: $[\cos\phi\pm(\sqrt{-1})sen\phi]^n=\cos(n\phi)\pm(\sqrt{-1})sen(n\phi)$, com n inteiro e positivo. No decorrer daquele Século, várias pesquisas com os ***números imaginários*** (NI) foram realizadas. É interessante observar que o termo ***imaginário*** foi o tema de uma polêmica sobre a existência dos ***números negativos***. Por exemplo, é famosa a discussão, ocorrida no período, 1712 e 1713, entre os matemáticos, o suíço John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) sobre a existência ou não do logaritmo (vide verbete nesta série) de um número negativo. Assim, o também filósofo Leibniz, nessa discussão, afirmou que se existisse o log (-1), então log $\sqrt{-1}$= log (-1)/2 → log (-1) = 2 log $\sqrt{-1}$, resultado esse que é um absurdo, pois log $\sqrt{-1}$ não existe por ser um ***número imaginário***, concluiu Leibniz

O estudo dos NI também foi conduzido pelo físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), em trabalhos realizados em 1734-1735 e nos quais deduziu a ***fórmula de Moivre***, generalizando-a para n real; tais trabalhos só foram publicados em 1740 [*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (*1734-1735*) **7**, p. 184]. Em consequência dessa demonstração, Euler deduziu outra equação, a hoje célebre ***Equação de Euler***: exp $[\pm\sqrt{-1}(\phi)] = \cos(\phi) \pm \sqrt{-1}[sen(\phi)]$. É oportuno destacar que Euler, em 1777, no manuscrito intitulado **De Formulis Differentialis Angularibus** ("Das Fórmulas Diferenciais Angulares") e apresentado à *Academia de São Petersburgo*, propôs a notação: i = $\sqrt{-1}$.

Os NI também foram objeto de pesquisas por parte dos matemáticos franceses Jean Le Rond d´Alembert (1717-1783) e o Marquês Pierre Simon de Laplace (1749-1827). D´Alembert, por exemplo, em seu livro **Essai d´une nouvelle théorie de la résistance des fluides** ("Ensaio sobre uma nova teoria da resistência dos fluidos"), publicado em 1752, observou que o cálculo do movimento de um corpo em um fluido ideal, envolvendo os NI, poderia ser realizado de maneira análoga ao cálculo com os ***números reais*** (NR) Desse modo ele afirmou (sem, contudo, demonstrar) que: f (x $\pm$iy) = u (x, y) $\pm$i v (x, y), $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ e $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$(em notação atual). Note que estas duas últimas igualdades só foram demonstradas no Século 18 por Cauchy, em 1814, e pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em 1851, as hoje famosas ***Equações de Cauchy-Riemann***. Laplace, por seu lado, utilizou os NI para calcular integrais envolvendo os NR, em trabalhos realizados a partir de 1782.

Para o desenvolvimento das funções contendo os NI era necessário saber como representá-los e, também, como operar com eles. Depois da tentativa de Wallis de representar graficamente um NI, em 1685, como vimos acima, uma nova foi apresentada pelo agrimensor e matemático autodidata norueguês Caspar Wessel (1745-1818), em 1797, no trabalho intitulado **Sobre a Representação Analítica da Direção: uma Tentativa**, publicado em 1799 [*Memórias da Academia Real da Dinamarca* (*1798*)]. Neste trabalho, Wessel mostrou, graficamente, como somar (ou subtrair) e multiplicar segmentos lineares. No caso da soma (ou subtração), ele tomou segmentos paralelos de mesmo sentido (ou de sentido contrário), e usou a seguinte regra: colocou o ponto inicial de um deles no ponto terminal do outro, e chamou de soma (ou subtração) o segmento que ia do ponto original do primeiro ao terminal do segundo. Depois, ele aplicou essa regra aos segmentos não paralelos. No caso da multiplicação, ele tomou também segmentos unitários e, primeiro, escolheu uma origem (O) e colocou segmentos unitários, à direita (+) e à esquerda (-) de O, em uma reta horizontal. Em seguida, considerou esses segmentos em uma vertical, partindo de O: acima (+ε) e abaixo (-ε). Assim, para realizar o produto de segmentos de retas ele usou a *regra da soma* que havia inventado e, ao preparar uma tabela representativa dessas somas e usando identidades trigonométricas, percebeu a ocorrência do seguinte produto: (+ε) (-ε) = + 1, que indicava ser ε = $\sqrt{-1}$. De posse dessa tabela, Wessel passou a considerar um segmento unitário por: cos ϕ + ε sen ϕ = 1 e, desse modo, um segmento qualquer nesse plano tinha, para ele, a seguinte representação: a + ε b.

Como esse trabalho de Wessel só foi descoberto, em 1895, pelo matemático dinamarquês Sophus Christian Juel (1855-1935), novos trabalhos sobre os NI foram propostos pelo matemático alemão John Karl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua Tese de Doutoramento, defendida em 1798, na *Universidade de Helmstädt* e, em 1806, pelo contador e matemático autodidata suíço Jean Robert Argand (1768-1822), no trabalho intitulado **Essai sur une manière de répresenter les quantités imaginaires dans les construtions géométriques** ("Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas"). Neste trabalho, Argand usou o termo ***modulus*** ("módulo") para representar o valor absoluto ou comprimento de um vetor representado por um ***número complexo*** (NC), conforme ele o denominou.

Vejamos, agora, o que hoje se denomina **Teoria das Variáveis Complexas** (TVC). Ela teve início quando Gauss (que havia trabalhado com os NI na defesa de sua Tese de Doutoramento, em 1798, como citamos acima) escreveu, em 1811, uma carta para o astrônomo e matemático alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) na qual questionou o significado de uma integral cujos limites envolviam os NI. Por exemplo, ao examinar a $\int dx/x$, o resultado da mesma (logaritmo) dependia se o "caminho de integração" continha ou não o ponto x = 0 no plano no qual ocorria a integração (lembrar que quando há o envolvimento de NI, eles estão no eixo vertical). Em caso afirmativo, deveria ser acrescentado ao resultado $+2\pi i$ ou $-2\pi i$ ao valor obtido quando o "caminho" não envolvesse x = 0. É interessante registrar que, embora Gauss trabalhasse com $\sqrt{-1}$= i, ele não acreditava na "realidade" dos NI. Essa mesma descrença era manifestada por Cauchy, quando começou a desenvolver a TVC com sua célebre **Mémoire sur la théorie des intégrales définies** ("Memória sobre a teoria das integrais definidas") apresentada à *Academia Francesa de Ciências*, em 1814. É nessa **Memória** que Cauchy trata de integrais do tipo $\int_a^b f(x)dx$, em que o integrando f(x) apresenta uma descontinuidade (valor infinito) em um ponto (x = c) no interior ou na fronteira do caminho (de a até b) em que a integração é realizada. Hoje, esse tipo de integração: $\int_a^b f(x)dx$ = $\lim_{\xi\to 0}\int_a^{c-\xi} f(x)dx + \lim_{\xi\to 0}\int_{c+\xi}^b f(x)dx$, é conhecido como ***valor principal de Cauchy***. Note que um tipo especial dessa integral - $\int_{-1}^{+1} dx/x$ - foi calculada pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1820 (*Journal de l´Ecole Polytechnique* **11**, p. 295), ao considerar x = exp (i ϕ), com ϕ variando entre 0 e (2 n + 1) π, de acordo com a ***Equação de Euler***.

Muito embora não acreditasse nos NI, Cauchy publicou dois livros, em 1821 [**Cours d´analyse de l´Ecole Royale Polytecnique** ("Curso de Análise da Escola Politécnica)] e, em 1823 [**Résumé des leçons donnés a l´Ecole Royale Polytecnique sur le calcul infinitésimal** ("Resumo das aulas ministradas na Escola Real Politécnica sobre o cálculo infinitesimal")], nos quais manifesta sua descrença nos NI. Por exemplo, no **Cours** ele escreveu que as expressões: cos a + $\sqrt{-1}$b, cos b + $\sqrt{-1}$a e cos (a + b) + $\sqrt{-1}$(a + b) são apenas "representações simbólicas as quais não podem ser interpretadas segundo as convenções gerais estabelecidas, e não representam qualquer coisa real". Apesar disso, ainda no **Cours**, Cauchy justificou as operações algébricas e analíticas dos NC. Essa mesma descrença foi repetida por Cauchy, em 1825, quando escreveu o artigo intitulado **Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires** ("Memórias sobre as integrais com limites imaginários") e apresentada à *Academia Francesa de Ciências*.

Por seu lado, Gauss também levou algum tempo para aceitar a "realidade" dos NC (nome também dado por ele). Sua aceitação só aconteceu no trabalho denominado **Theoria Residuorum Biquadraticorum** ("Teoria Residual das Biquadráticas"), que ele publicou em 1832 (*Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores* **3**), no qual ele usou a notação a + i b e o considerou como um ponto (e não como um segmento de reta como fizeram Wessel e Argand) em um ***plano complexo***, bem como desenvolveu a sua Álgebra. Note que a realidade dos NC também foi considerada por Cauchy, em 1846 (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie de Sciences de Paris* **23**, p. 537; 557; 689), quando ele demonstrou o hoje célebre ***Teorema da Integral de Cauchy*** (em notação atual):

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=i}^{n} \mathrm{Res}\, f(a_k),$$

onde C é uma curva que envolve ou não singularidades (***polos***), z = a + i b é uma ***variável complexa*** e Res significa o ***resíduo***, conceito que começou a ser elaborado por Cauchy, em seu **Résumé**, de 1823, visto anteriormente, e completado em sua obra **Exercices de mathématique 1** ("Exercícios de matemática 1"), publicado em 1826, e definido como: F = $\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)$. Observe que Cauchy usou a notação E[f (z)] para o segundo membro da integral indicada acima.

A partir desses trabalhos de Gauss e Cauchy, a TVC teve novos refinamentos, como, por exemplo, a integração de ***funções plurívocas***, tratada por Cauchy, nos textos de 1846 citados acima, em que realizada essa integração ao longo de um caminho fechado envolvendo um determinado ponto (P), o valor da integral não era o mesmo quando o integrando voltava ao seu valor inicial; o mesmo acontecia para outras voltas completas. Era como se houvesse uma ***ramificação*** do integrando a partir de P. Contudo, Cauchy observou que depois de determinado número de vezes em que a integração era feita, o integrando voltava ao valor inicial; notou mais ainda que esse comportamento se repetisse, constituindo o que ele denominou de ***índices de periodicidade***, já encontrados também por ele em trabalhos anteriores. Observe-se que esses e novos problemas das ***funções plurívocas*** foram tratados pelo matemático francês Victor Alexandre Puiseux (1820-1883), em 1850 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **15**, p. 365), por Cauchy, em 1851 (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie de Sciences de Paris* **32**, p. 68), e por Riemann, em 1851, em sua Tese de Doutoramento, orientada por Gauss e defendida na *Universidade de Göttingen*, na qual re-obteve as ***Equações de Cauchy***, de 1814 (já referidas), e os conceitos de ***transformação conforme*** e de ***superfície riemanniana***, e cujos detalhes podem ser vistos nos textos usados neste verbete. É interessante chamar a atenção de que Maxwell, em seu famoso **A Treatise on Electricity & Magnetism** ("Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo"), publicado em 1873 (Dover, 1954), em seu item (183), chegou às ***Equações de Cauchy-Riemann*** (sem aparentemente conhecê-las, pois não as citas em seu *Índex*), usando o conceito de ***funções conjugadas***: - *Duas quantidades α e β são ditas funções conjugadas de x e de y, se* $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ *é uma função de* $x + \sqrt{-1}y$. *Então, segue dessa definição que:* $d\alpha/dx = d\beta/dy$ *e* $d\alpha/dy + d\beta/dx = 0$. É também interessante destacar que, nesse livro, Maxwell demonstrou que a luz é uma onda eletromagnética (em decorrência de suas quatro famosas equações que, de certo modo, estão relacionadas com suas ***funções conjugadas***) cuja comprovação experimental foi realizada por Hertz, em 1887 (*Annalen der Physik* **31**, p. 421), conforme mostramos em verbetes desta série. Para detalhes daquela relação ver, por exemplo, os textos: John David Jackson, **Classical Electrodynamics** (John Wiley, 1972/1998); Josif Frenkel, **Princípios de Eletrodinâmica Clássica** (EDUSP, 1996); e José Maria Filardo Bassalo, **Eletrodinâmica Clássica** (Livraria da Física, 2007).

Visto o papel de $\sqrt{-1} = i$ na Matemática, vejamos o seu papel na Física. Indiretamente, esse NI aparece no desenvolvimento de vários ramos da Física, cujos detalhes podem ser vistos em Nahim (op. cit.). Contudo, na conclusão deste verbete, veremos como o i aparece diretamente na Física. Em 1904 (*Koniklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **6**, p. 809), o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902) demonstrou que as coordenadas espaciais (x, y, z) e o tempo (t) se transformam da seguinte maneira:

$$x' = \gamma\,(x - vt);\;\; y' = y;\;\; z' = z;\;\; t' = \gamma\,(t - vx/c^2),\;\; [\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}],$$

ou :

$$dx' = \gamma\,(dx - vdt);\; d\,y' = dy;\;\; dz' = dz;\;\; dt' = \gamma\,(dt - vdx/c^2),$$

quando um sistema de coordenadas (x´, y´, z´) se desloca com uma velocidade v constante, paralelamente ao eixo dos x de um sistema de coordenadas (x, y, z). Esse grupo de equações foi denominado de ***Transformações de Lorentz*** (TL) pelo físico e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), em 05 de junho de 1905 (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie de Sciences de Paris* **140**, p. 1504). Em 30 de junho de 1905 (*Annalen der Physik* **17**, p. 891), o físico germano-suíço-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921) publicou seu célebre artigo intitulado **Elektrodynamik bewegter Körper** ("Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento"), no qual desenvolveu o que hoje se conhece como Teoria da Relatividade Restrita, baseada em dois princípios: 1) *As Leis da Física são Invariantes por uma Transformação de Lorentz*; 2) *A velocidade da luz no vácuo* (c) *é uma constante em qualquer sistema de referência*.

Note-se que usando esses princípios, Einstein demonstrou uma série de resultados revolucionários, dentre os quais destacamos: - 1) ***Contração do Comprimento*** - $L_0 = \gamma$ L -, onde L_0 é o comprimento de um bastão rígido que se desloca com uma velocidade v em relação a um observador em repouso, e L é o comprimento do bastão visto por esse observador; 2) ***Dilatação do Tempo*** - $d\tau = \gamma dt$ -, resultado esse que significa dizer que o intervalo de tempo (dt) entre dois eventos, medido numa série de relógios sincronizados e em repouso, é maior do que o intervalo de tempo ($d\tau$, ***tempo próprio***) entre esses mesmos eventos, medido por um observador solidário a um relógio que se desloca com a velocidade v constante em relação ao conjunto de relógios sincronizados acima referido

Mais tarde, em 1908 [*Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 53; ***IN***: **Textos Fundamentais da Física Moderna 1** (Fundação Calouste Gulbenkian, 1978), p. 91], o matemático russo-alemão Hermann Minkowski (1864-1909) mostrou que as TL representavam uma espécie de "rotação" num espaço 4-dimensional definido por: x, y, z, $\sqrt{-1}$ct, com um ***intervalo de universo*** (***métrica pseudo-euclidiana***) definido por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ , \ (\mu, \nu = 1,2,3,4)$$

onde $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e $g_{44} = -1$ são elementos do ***tensor métrico de Minkowski*** ($g_{\mu\nu}$), característico do ***Espaço de Minkowski*** (EM) ou ***espaço-tempo***. Com a formulação da Relatividade Geral por Einstein, em 1915 (*Sitzungberichte Preussische Akademie der Wissenschaften* **2**, p. 778; 799; 831; 844), esse EM foi generalizando para o ***Espaço de Riemann*** ou ***espaço-tempo curvo***, com o ***tensor métrico*** ($g_{\mu\nu}$) dependendo das coordenadas espaciais curvilíneas.

Concluindo este verbete, vejamos mais dois exemplos em que o $\sqrt{-1}$ = i representa um papel fundamental na Física. Primeiro, na equação formulada pelo físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933), em 1926 (*Annales de Physique Leipzig* **79**, p. 361; 489; 734; 747; **80**, p. 437; e **81**, p. 136), a ***Equação de Schrödinger*** (ES):

$$\left[(-\hbar^2/2m)\,\Delta + V(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t) = i\,\hbar\,\partial\psi(\vec{r},t)/\partial t \Leftrightarrow \hat{H}\,\psi(\vec{r},t) = i\,\hbar\,\partial\psi(\vec{r},t)/\partial t$$

onde $\psi(\vec{r},t)$ **é a *função de onda de Schrödinger*** ou *campo escalar*, $\Delta = \nabla^2$ é o ***operador laplaciano***, $\hat{H}$ é o ***operador Hamiltoniano*** [$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ = ***operador energia cinética*** ($\hat{p}^2/2m$, $\hat{p} = i\hbar\nabla$ + ***operador energia potencial***), $V(\vec{r},t)$ é um dado potencial e $\hbar$ = h/2π, sendo h a ***constante de Planck***. Segundo, na equação formulada pelo físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933), em 1928 (*Proceedings of the Royal Society* **A117; A118**, p. 610; 351), a ***Equação de Dirac*** (ED):

$$(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m\,c)\,\Phi = 0\ ,$$

onde γ^μ é a ***matriz de Dirac*** (matriz 4 × 4), $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ (μ = 1, 2, 3, 4) é o ***operador gradiente***, Φ é o ***spinor de Dirac*** (matriz coluna), m é a massa do elétron, e c é a velocidade da luz no vácuo.

ANTERIOR SEGUINTE