CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

A Coerência, a De(s)coerência e a Dinâmica de Sistemas Físicos Quânticos Não Lineares.

Neste verbete, trataremos da **coerência**, da **de(s)coerência** e da **dinâmica** de sistemas físicos dissipativos representados por ***Equações de Schrödinger Não-Lineares*** (ESN-L), tais como: 1) ***Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski***; 2) ***Equação de Bateman-Caldirola-Kanai***; 3) ***Equação de Diósi-Halliwell-Nassar***; 4) ***Equação de Kostin***; 5) ***Equação Schuch-Chung-Hartmann***; 6) ***Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar***; 7) ***Equação de Schrödinger-Nassar do Elétron Estendido***; e 8) ***Equação de Gross-Pitaesvski***.

Primeiro, vejamos cada uma dessas equações. Em 1976 [*Annals os Physics* (New-York) **100**, p. 62] e, em 1979 (*Physica Scripta* **20**, p. 539), os poloneses, o físico Iwo Bialyniciki-Birula (n.1933) e o matemático Jan Mycielski (n.1932) propuseram uma ESN-L para descrever sistemas físicos, conhecida como a ***Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski*** (EBB-M):

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \left\{V(x,t) - \frac{\hbar\lambda}{2}\ln[\psi(x,t)\psi^*(x,t)]\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$ e V(x, t) representam, respectivamente, a função de onda schrödingeriana (vide verbete nesta série) e o potencial dependente do tempo do sistema em consideração, λ é uma constante, e (*) significa o complexo conjugado.

Em 1931 (*Physical Review* **38**, p. 815), 1941 (*Nuovo Cimento* **18**, p. 393) e 1948 (*Progress in Theoretical Physics* **3**, p. 440), os físicos, o norte-americano H. Bateman, o italiano Piero Caldirola (1914-1984) e o japonês E. Kanai propuseram, respectivamente, uma ESN-L para descrever sistemas físicos, conhecida como a ***Equação de Bateman-Caldirola-Kanai*** (EB-C-K):

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\exp(\lambda,t)\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \exp(\lambda,t)\times V(x,t)\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t) e λ apresentam os mesmos significados da EBB-M.

Em 1998 (*Physical Review Letters* **81**, p. 2846), os físicos, o húngaro Lajos Diósi (n.1950) e o inglês Jonathan Halliwell propuseram uma ESN-L para descrever sistemas físicos dependentes do tempo, dada pela expressão:

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} +$$

$$+\left\{V(x,t)+\lambda x X(t)-i\hbar\left(\frac{[x-q(t)]^2}{a^2}-\frac{\eta(t)[x-q(t)]}{a}\right)\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t) e λ apresentam o mesmo significado da EBB-M, X (t) é a posição de uma partícula clássica submetida ao potencial V(x, t), q (t) = <x>, e a é constante.

Contudo, como essa ***Equação de Diósi-Halliwell*** não é normalizada, para então normalizá-la, em 2004 [**Chaotic Behavior of a Wave Packet under Continuous Quantum Mechanics** (UFPA/*preprint*)], o físico brasileiro Antonio Boulhosa Nassar (n.1953), propôs a seguinte equação:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+$$

$$+\left\{V(x,t)+\lambda x X(t)-\frac{i\hbar}{4\sigma}\left(\frac{[x-q(t)]^2}{a^2(t)}-1\right)\right\}\times\psi(x,t),$$

onde σ é uma constante. Esta equação, conhecida como ***Equação de Diósi-Halliwell-Nassar*** (ED-H-N) representa a ***Equação de Schrödinger para Medidas Quânticas Contínuas***.

Em 1972 (*Journal of Chemical Physics* **57**, p. 3539), M. D. Kostin propôs uma ESN-L para descrever sistemas físicos não conservativos, dada por:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\left\{V(x,t)-\frac{\hbar\lambda}{2i}\ln\left[\frac{\psi(x,t)}{\psi^*(x,t)}\right]\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t), λ e (*) têm os mesmos significados da EBB-M. Essa equação é conhecida como ***Equação de Kostin*** (EK).

Em 1983 e 1984 (*Journal of Mathematical Physics* **24**; **25**, p. 1652; 3086), os físicos D. Schuch e K. M. Chung, e o químico alemão Hermann Hartmann (1914-1984) apresentaram uma ESN-L para estudar sistemas físicos dependentes do tempo, com a seguinte forma:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+$$

$$+\left\{V(x,t)-i\hbar\lambda\left[\ln\psi(x,t)-<\ln\psi(x,t)>\right]\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t) e λ têm os mesmos significados da EBB-M. Essa equação é conhecida como ***Equação de Schuch-Chung-Hartmann*** (ES-C-H).

Em 1973 (*Seminar Talk at Los Alamos)*, D. Süssmann e, independentemente, em 1975, R. W. Hasse (*Journal of Mathematical Physics* **16**, p. 2005), K. Albrecht (*Physics Letters* **B56**, p. 127) e Kostin (*Journal of Statistical Physics* **12**, p. 146) propuseram uma ESN-L, que foi generalizada por Nassar, em 1986 (*Journal of Mathematical Physics* **27**, p. 2949), conhecida como ***Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar*** (ES-H-A-K-N), destinada a estudar sistemas físicos dissipativos, e representada por:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+$$

$$+\left\{V(x,t)+\lambda\left([x-q(t)]\times[c\hat{p}+(1-c)<\hat{p}>-\frac{i\hbar c}{2}\right)\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t), e λ têm os mesmos significados da EBB-M, e q(t) = <x>. Além disso, c é uma constante, com os valores: c = 1, para Süssmann; c = ½, para Hasse; c = 0 para Albrecht e Kostin, e $\hat{p}$ = - $i\hbar\partial/\partial x$, é o ***operador momento linear***.

Em 2007 (*International Journal of Theoretical Physics* **46**, p. 548), Nassar propôs uma ESN-L para estudar a dinâmica do ***elétron linear estendido***, e que tem o seguinte aspecto:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+$$

$$+\left\{(i\hbar\alpha)\ell n\left[\frac{\psi(x,t-2L/c)\times\psi^*(x,t)}{\psi^*(x,t-2L/c)\times\psi(x,t)}\right]\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\alpha=e^2/(6mcL^2)$, sendo $\psi(x,t)$ e $\psi(x,t-2L/c)$ funções de onda schrödingerianas, e c a velocidade da luz no vácuo.

Registre-se que essa ***Equação de Schrödinger-Nassar do Elétron Estendido*** (ES-NEE) é uma versão quântica do estudo realizado, em 1892 (*Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturales* **25**, p. 363), pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902) e, em 1905 [**Theorie der Elektrizitat II** (Leipzig, Teubner)], pelo físico alemão Max Abraham (1875-1922) ao mostrarem que quando um elétron, de massa (m) e de carga elétrica (e) é acelerado, existem forças adicionais atuando sobre esse elétron devido ao seu próprio campo elétrico. Por sua vez, em 1904 (*Akademie van Wetensch te Amsterdam* **13**), o físico alemão Arnold Joahnnes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) e, em 1918 (*Physical Review* **11**, p. 376), L. Page corrigiram as dificuldades apresentadas pela *Força de Lorentz-Abraham*, isto é, as soluções descontraladas apresentadas pela mesma quando o elétron está livre, assumindo que o elétron não-relativístico é ***estendido***, ou seja, tem uma dimensão L com sua carga distribuída uniformemente sobre sua superfície.

Por fim, em 1961, o físico norte-americano Eugene P. Gross (1926-1991) (*Nuovo Cimento* **20**, p. 1766) e, independentemente, o físico russo Lev Petrovich Pitaevskii (n.1933) [*Soviet Physics* (*JETP*) **13**, p. 451] propuseram uma ESN-L para descrever sistemas físicos não conservativos, representada pela equação:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\left\{V(x,t)+\lambda|\psi(x,t)|^2\right\}\times\psi(x,t),$$

onde $\psi(x,t)$, V(x, t) e λ têm os mesmos significados da EBB-M. Essa equação é conhecida como ***Equação de Gross-Pitaevskii*** (EG-P).

Apresentadas as ESN-L, vejamos agora como saber a **coerência** ou a **de**(**s**)**coerência** de cada uma dessas equações. Para isso, teremos que estudar a sua *dinâmica* por intermédio da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm (MQB-B). Vejamos como fazer esse estudo. Inicialmente, vamos considerar a seguinte transformação: $\psi(x,t)=\varphi(x,t)\times\exp[iS(x,t)]$, proposta pelos físicos, o alemão Erwin Madelung (1881-1972), em 1926 (*Zeitschrift für Physik* **40**, p. 332), e o norte-americano David Joseph Bohm (1917-1992), em 1952 (*Physical Review* **85**, p. 166; 180), onde S(x,t) é a *ação clássica*, e $\varphi(x,t)$ é definida pela seguinte correspondência: $|\psi(x,t)|^2 \leftrightarrow \rho(x,t) = \varphi^2(x,t)$, o que significa ser a ***densidade de probabilidade quântica*** $\leftrightarrow$ ***densidade quântica de massa***. Além disso, definiremos a ***velocidade quântica*** [$v_Q(x,t)$] por: $v_Q(x,t)$ = $(\hbar/m)\partial[S(x,t)]/\partial x$. É interessante destacar que como a MQB-B é uma *teoria causal* ela admite uma *velocidade* [$v_Q(x,t)$] e, portanto, uma *trajetória* [x(t)] [lembrar que: $v_Q(x,t)\big|_{x=x(t)} = dx/dt$] que se deve ao ***potencial quântico de Bohm*** definido por: $V_{Q-B}(x,t) = -(\hbar^2/m)(1/\varphi)\times\partial^2\varphi/\partial x^2$.

Assim, ao aplicar a ***transformação de Madelung-Bohm*** em cada ESN-L resulta em uma equação complexa. Ao tomar a parte imaginária da mesma, e fazendo algum algebrismo, chegamos a uma expressão conhecida como ***equação da continuidade*** (EC) ou ***lei de conservação da massa*** (LCM), característica da Dinâmica dos Fluidos. Essa equação caracteriza a **coerência** ou a **de**(**s**)**coerência** do sistema físico dissipativo (dependente do tempo) representado por cada ESN-L, quando ela é, respectivamente, homogênea ou não-homogênea. Por outro lado, a parte real da equação complexa acima referida (que envolve o V_{Q-B}), representa a expressão analítica da ***Equação da Dinâmica*** (***Segunda Lei Geral de Newton***). Agora, vejamos a EC/LCM para cada ESN-L que vimos neste verbete, cujos detalhes de seu cálculo analítico podem ser vistos em: José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Elementos de Física Matemática 3: Equações Integrais, Integrais de Caminho e Propagadores de Feynman** (Livraria da Física, em fase de publicação).

Então, para as ESN-L vistas acima, temos:

1) *Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski* (**coerente**):

1.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_Q)}{\partial x} = 0;$$

1.2) ***Equação de Newton Não-Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t) + V_{Q-B}(x,t) - V_{BB-M}(x,t)\right] =$$

$$= F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)} + F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)} - F_{Q-BBM}(x,t)\big|_{x=x(t)},$$

onde $F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e $F_{Q-BBM}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força quântica de Bialynicki-Birula-Mycielski***, sendo $V_{Q-BBM}(x,t) = \frac{\hbar\lambda}{2}\times \ell n\rho$ o ***potencial quântico de Bialynicki-Birula-Mycielski***.

2) *Equação de Bateman-Caldirola-Kanai* (**coerente**):

2.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_{Q-BCK})}{\partial x}=0\ ;$$

onde $v_{Q-BCK}(x,t)=\exp(-\lambda t)\times v_{Q}(x,t)$, é a ***velocidade quântica de Bateman-Caldirola-Kanai***;

2.2) ***Equação de Newton Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\lambda\times v_{Q-BCK}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t)+V_{Q-BCK}(x,t)\right]=$$

$$=F_{C-N}(x,t)\big|_{x\to x(t)}+F_{Q-BCK}(x,t)\big|_{x\to x(t)}\ ,$$

onde $F_{C-N}(x,t)\big|_{x\to x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, e $F_{Q-BCK}(x,t)\big|_{x\to x(t)}$ é a ***força quântica de Bateman-Caldirola-Kanai***, sendo $V_{Q-BCK}(x,t)=\exp(-2\lambda t)\times V_{Q-B}(x,t)$ o ***potencial quântico de Bateman-Caldirola-Kanai***.

3) ***Equação de Diósi-Halliwell-Nassar*** [**de(s)coerente**]:

3.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_{Q})}{\partial x}=-\left(\frac{\rho}{2\sigma}\right)\times\left\{\frac{[x-q(t)]^2}{a^2(t)}-1\right\};$$

3.2) ***Equação de Newton Não-Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda x X(t)+V(x,t)+V_{Q}(x,t)\right]=$$

$$=F_{E}(t)+F_{C-N}(x,t)\big|_{x\to x(t)}+F_{Q-B}(x,t)\big|_{x\to x(t)}\ ,$$

onde $F_{C-N}(x,t)\big|_{x\to x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-B}(x,t)\big|_{x\to x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e $F_E(t) = -\lambda X(t)$ é a ***força linear externa***.

4) ***Equação de Kostin*** (coerente):

4.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_{Q})}{\partial x}=0\ ;$$

4.2) ***Equação de Newton Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\lambda\times\left|v_{Q}(x,t)\right|_{x\to x(t)}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t)+V_{Q}(x,t)\right]=$$

$$= F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)} + F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)} \,,$$

onde $F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e λ é o ***coeficiente de fricção*** (***atrito***).

5) ***Equação Schuch-Chung-Hartmann*** [**de(s)coerente**]:

5.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_Q)}{\partial x} = -\lambda \rho \times \left[\ell n(\rho) - < \ell n(\rho) \right];$$

5.2) ***Equação de Newton Dissipativa***:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + m\lambda \times \left| v_Q(x,t) \right|_{x=x(t)} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t) + V_{Q-B}(x,t)\right] =$$

$$= F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)} + F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)} \,,$$

onde $F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-BCK}(x,t)\big|_{x=x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e λ é o ***coeficiente de fricção*** (***atrito***).

6) ***Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar*** (**coerente**):

6.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_{QM})}{\partial x} = 0 \,,$$

onde: $v_{QM}(x,t) = v_Q(x,t) + \lambda c \times [x - q(t)]$ é a ***velocidade quântica modificada***;

6.2) ***Equação de Newton Dissipativa***:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + m\lambda \times \left\{ c\left[v_Q(x,t)\big|_{x=x(t)} - \left| v_{QM}(x,t) \right|_{x=x(t)} - < \left| v_{QM}(x,t) \right|_{x=x(t)} > \right] \right\} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t) + V_Q(x,t)\right] = F_{C-N}(x,t)\big|_{x=x(t)} + F_{Q-B}(x,t)\big|_{x=x(t)} \,,$$

onde $F_{C-N}(x,t)|_{x-x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-B}(x,t)|_{x-x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e λ é o ***coeficiente de fricção*** (***atrito***).

7) ***Equação de Schrödinger-Nassar do Elétron Estendido*** (**coerente**):

7.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_{QM})}{\partial x} = 0;$$

7.2) ***Equação de Newton Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{e^2}{3cL^2}\right) \times \left[v_Q(x, t - 2L/c)|_{x-x(t)} - v_Q(x,t)|_{x-x(t)}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[V_{Q-B}(x,t)\right] = F_{Q-B}(x,t)|_{x-x(t)},$$

onde $F_{Q-B}(x,t)|_{x-x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, c é a ***velocidade da luz no vácuo***, e L é a ***dimensão do elétron estendido***.

8) ***Equação de Gross-Pitaesvski*** (**coerente**):

8.1) ***Equação da Continuidade***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_{QM})}{\partial x} = 0;$$

8.2) ***Equação de Newton Não-Dissipativa***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[V(x,t) + V_Q(x,t) + V_{G-P}(x,t)\right] =$$

$$= F_{C-N}(x,t)|_{x-x(t)} + F_{Q-B}(x,t)|_{x-x(t)} + F_{G-P}(x,t)|_{x-x(t)},$$

onde $F_{C-N}(x,t)|_{x-x(t)}$ é a ***força clássica de Newton***, $F_{Q-B}(x,t)|_{x-x(t)}$ é a ***força quântica de Bohm***, e $F_{G-P}(x,t)|_{x-x(t)} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda\rho(x,t)]$ é a ***força de Gross-Pitaevskii***.

Na conclusão deste verbete, faremos um breve comentário sobre a **de**(s)**coerência quântica** (DQ). Na Mecânica Quântica, a DQ ocorre quando há perda da ***coerência*** dos ângulos de *fase* entre os componentes de um sistema em uma superposição quântica. Em consequência, essa defasagem leva a um comportamento clássico ou probabilístico. A DQ não gera o <u>colapso real</u> da função de onda schrödingeriana, ela apenas dá uma explicação para um <u>aparente colapso</u>. A teoria da DQ começou a ser desenvolvida, em 1981 (*Physical*

Review **D24**, p. 1516), pelo físico polonês Wojciech Hubert Zurek (n.1951) e, a partir daí, ele continuou a desenvolver a DQ e suas inúmeras aplicações como, por exemplo, a Física Clássica e Quântica da Informação e seu "Santo Graal": a ***computação quântica***. Note que esta requer que estados quânticos ***coerentes*** sejam preservados e os ***de***(***s***)***coerentes*** sejam manejados. Para um estudo mais detalhado desse trabalho de Zurek, bem como da DQ, ver: Gennaro Auletta, **Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics** (World Scientific, 2001); en.wikipedia.org/wiki/Quantum_decoherence.

Por fim, é oportuno destacar que antes do entendimento da DQ, a Mecânica Quântica Ortodoxa, representada pela ***Interpretação de Copenhagen***, assume que o colapso da função de onda é um processo a *priori*. Contudo, a Mecânica Quântica de de Broglie–Bohm (MQBB), iniciada em 1952, conforme vimos acima, desenvolve um mecanismo que explica o *aparente* colapso da função de onda. Por outro lado, note que a **de**(**s**)**coerência quântica** aparece somente na ***equação da continuidade*** que envolve a densidade de probabilidade [$\rho(x,t)$] e não na *fase*, pois esta é afetada apenas indiretamente, conforme se pode ver na ***transformação de Madelung-Bohm***, ou seja: $\sqrt{\rho(x,t)} = \psi(x,t) \times \exp[-iS(x,t)]$ Para detalhes da MQBB, ver: José Maria Filardo Bassalo, Paulo de Tarso Santos Alencar, Mauro Sérgio Dorsa Cattani, e Antonio Boulhosa Nassar, **Tópicos de Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm** (EdUFPA, 2002); *e-book*: http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1655.pdf (2010); e artigos desses autores (com a colaboração de Daniel Gemaque da Silva) no *arXiv.org* (2009a-d; 2010a-d; 2011).
