CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

Segunda Quantização (Eletrodinâmica Quântica), a Estatística de Fermi-Dirac, a Equação de Dirac, o Prêmio Nobel de Física (PNF) de 1933, e o Paradoxo de Klein.

Neste item, veremos como Dirac realizou seus primeiros trabalhos científicos, que culminou com o compartilhamento do PNF de 1933, e alguns resultados decorrentes daqueles trabalhos. Para isso, usaremos o artigo do físico holandês-norte-americano Abraham Pais (1918-2000), no livro intitulado **Paul Dirac: The man and his work** (Cambridge University Press, 1998), editado por Peter Goddfard, assim como sua *Nobel Biography* e sua *Nobel Lecture* denominada **Theory of Electrons and Positrons**. Em Cambridge, Fowler ensinou a Dirac a então velha teoria quântica traduzida pela ***Equação de Bohr-Wilson-Ishiwara-Sommerfeld***, construída entre 1913 e 1916. Por sua vez, em 1925, Dirac teve a oportunidade de conhecer os físicos, o dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962; PNF, 1922), em maio de 1925, e o alemão Werner Karl Heisenberg (1901-1975; PNF, 1932), em julho de 1925, em virtude de conferências que esses físicos ministraram em Cambridge, sobre o que viria a ser conhecida como a Mecânica Quântica, que havia sido desenvolvida, em 1925, por Heisenberg (*Zeitschrift für Physik* **33**, p. 879) e pelos físicos alemães Max Born (1882-1970; PNF, 1954) e Ernst Pascual Jordan (1902-1980) (*Zeitschrift für Physik* **34**, p. 858). Em consequência desses encontros, Dirac apresentou, em novembro de 1925 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A109**, p. 642), uma nova formulação da ***Mecânica Quântica de Born-Heisenberg-Jordan*** por intermédio de uma conexão entre essa Mecânica e a Mecânica Hamiltoniana. Desse modo, os novos entes matemáticos encontrados por Dirac nesse trabalho, que correspondiam às "quantidades de transição" (por exemplo, x e y representando duas quaisquer variáveis do sistema atômico) usadas por Heisenberg em seu artigo, apresentavam um produto não-comutativo, cuja diferença (xy - yx), no limite clássico, correspondia ao ***parêntesis de Poisson*** [apresentado pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1809 (*Journal de l´Ecole Polytechnique* **8**, p. 266)], isto é:

$$\sum_i \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i}\frac{\partial y}{\partial q_i}\right) \to \frac{2\pi}{ih}[x, y] ,$$

onde p_i e q_i são as variáveis canonicamente conjugadas da Mecânica Hamiltoniana e [x, y] = xy – yx representa o ***comutador*** ([]) entre x e y. Em maio de 1926, Dirac defendeu sua Tese de Doutoramento intitulada **Quantum Mechanics** e que foi publicada, ainda em 1926 (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **23**, p. 412). Também em 1926 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A111**, p. 281, 405; *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **23**, p. 500), Dirac aplicou sua Mecânica Quântica a uma grande variedade de problemas atômicos, dentre os quais, o ***efeito Compton***, descoberto pelo físico norte-americano Arthur Holly Compton (1892-1962; PNF, 1927), em 1923 (*Physical Review* **21**, p. 207, 483, 715; **22**, p. 409; *Philosophical Magazine* **46**, p. 897).

Por sua vez, em 1926 (*Annales de Physique Leipzig* **79**, p. 361; 489; 734; 747; **80**, p. 437; e **81**, p. 136), o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933) desenvolveu a hoje conhecida ***Mecânica Quântica Ondulatória*** (MQO), traduzida pela ***Equação de Schrödinger*** (ES):

-

$$\left[(-\hbar^2/2m)\,\Delta + V(\vec{r}, t)\right]\psi(\vec{r}, t) = i\,\hbar\,\partial\psi(\vec{r}, t)/\partial t \Leftrightarrow \hat{H}\,\psi(\vec{r}, t) = i\,\hbar\,\partial\psi(\vec{r}, t)/\partial t$$

-

onde $\psi(\vec{r},t)$ é a ***função de onda de Schrödinger*** ou ***campo escalar***, $\Delta = \nabla^2$ é o ***operador laplaciano***, $\hat{H}$ é o ***operador Hamiltoniano*** [$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ = ***operador energia cinética*** ($\hat{p}^2/2m$, $\hat{p} = i\hbar\nabla$ + ***operador energia potencial***)], $V(\vec{r},t)$ é um dado potencial e $\hbar = h/2\pi$, sendo h a ***constante de Planck***. Inicialmente, Dirac reagiu com hostilidade a esses trabalhos de Schrödinger, mas logo depois os aceitou e, em agosto de 1926 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A112**, p. 661), aplicou a MQO para estudar os sistemas de partículas idênticas, encontrando dois grupos de soluções para seus estados de energia, uma simétrica e uma antissimétrica. Observou ainda que esses grupos não se combinam e não se podem transformar um no outro, pois apenas o ***grupo antissimétrico*** ao que denominou, nessa ocasião de ***princípio da exclusão de Pauli***, [formulado pelo físico austríaco Wolfgang Pauli Junior (1900-1958; PNF, 1945), em 1925 (*Zeitschrift für Physik* **31**, p. 765)]. Desse modo, Dirac demonstrou que elétrons livres (não interagentes) são descritos por uma ***função de onda*** representada por um determinante. Além do mais, ao aplicar à ***função de onda*** de uma partícula a condição de quantização imposta às condições de fronteira da mesma, Dirac obteve a ***Estatística de Fermi*** [proposta pelo físico ítalo-norte-americano Enrico Fermi (1901-1954; PNF, 1938), em 1926 (*Zeitschrift für Physik* **36**, p. 902)], razão pela qual é hoje conhecida como ***Estatística de Fermi-Dirac***. Dirac observou ainda que se esse procedimento fosse aplicado à ***função de onda simétrica***, resultaria como consequência a ***Estatística de Bose-Einstein*** [proposta, em 1924, pelos físicos, o indiano Satyendra Nath Bose (1894-1974) (*Zeitschrift für Physik* **26**, p. 178) e o germano-suíço-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921) (*Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mathematisch-Physikalische Klasse, Sitzungsberichte*, p. 261)]. É oportuno destacar que Heisenberg, também em 1926 (*Zeitschrift für Physik* **38**; **39**, p. 411; 499), usou a MQO para estudar o átomo de hélio (He).

Depois de obter seu Doutoramento, Dirac foi, em setembro de 1926, para Copenhague trabalhar com Bohr, a quem admirava bastante. Lá, Dirac usou as transformações canônicas ou teoria da transformação na Mecânica Quântica e na Eletrodinâmica. Desse pós-doutoramento (setembro de 1926-fevereiro de 1927) que realizou com Bohr, Dirac publicou, em 1927, três trabalhos fundamentais para a Teoria Quântica. No primeiro deles (*Proceedings of the Royal Society* **A113**, p. 621), Dirac apresentou a hoje famosa ***função delta de Dirac*** [δ(t)], com a seguinte definição [ver: José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Elementos de Física Matemática, Vol. 1** (Livraria da Física/Maluhy&Co.2010):

$$\delta_a(t) = 1/a, \text{ se } |t| < a; = 0, \text{ se } |t| > a; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0).$$

É interessante destacar que Dirac reuniu esses trabalhos sobre Mecânica Quântica em seu célebre livro (até hoje em uso) intitulado **Principles of Quantum Mechanics**, publicado em 1930 (Oxford University Press).

Ainda em 1927 (*Proceedings of the Royal Society* **A114**, p. 243; 710), Dirac publicou dois trabalhos (o primeiro em Copenhague e o segundo em Goettingen) nos quais considerou Ψ e sua conjugada $\bar{\Psi}$, como operadores (em vez de números como Schrödinger havia considerado, em 1926, como vimos acima), porém sua álgebra era não-comutativa, isto é: $\Psi\bar{\Psi} \neq \bar{\Psi}\Psi$. Com esse procedimento, conhecido como ***Teoria Quântica da Emissão e Absorção da Radiação*** {também conhecida como **Segunda Quantização**, que considera os operadores: ***criação*** (a^+), ***destruição*** (a^-) e ***número de ocupação*** ou ***conservação*** ($N = a^+ a^-$) que satisfazem as seguintes regras de comutação: $[a_\alpha, a^+_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$, $[a, a] = [a^+, a^+] = 0$}, Dirac quantizou o campo eletromagnético, procedimento esse que deu origem ao desenvolvimento da ***Eletrodinâmica Quântica*** (QED: “Quantum Electrodynamics”).

Em 1927, por ocasião da *Quinta Conferência de Solvay* que aconteceu em Bruxelas, Dirac encontrou-se com Bohr que lhe perguntou em que estava trabalhando, Dirac então lhe respondeu que buscava uma teoria relativista do elétron. Bohr retrucou dizendo-lhe que o físico sueco Oskar Benjamin Klein (1894-1977), em 1926 (*Zeitschrift für Physik* **37**, p. 895), já havia realizado essa teoria. Dirac não concordou com essa afirmação, pois sabia que Klein fizera apenas uma versão relativística da ***Equação***

de Schrödinger. Dirac, contudo, buscava outro caminho e que foi encontrado por ele, em 1928 (*Proceedings of the Royal Society* **A117; A118**, p. 610; 351), deduzindo a hoje famosa **Equação de Dirac** (ED) - $(i \hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m c) \Phi = 0$ -, onde γ^{μ} é a ***matriz de Dirac*** (matriz 4×4), $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), Φ é o ***spinor de Dirac*** (matriz coluna), m é a massa do elétron, e c é a velocidade da luz no vácuo. É interessante destacar que, em 1974, Dirac escreveu o livro denominado **Spinors in Hilbert Space** (Plenum), no qual ele estuda os spinores com o formalismo do Espaço de Hilbert.

Vejamos alguns resultados importantes da ED. Primeiro, ela conseguiu remover a degenerescência dos níveis de energia das órbitas eletrônicas Bohrianas (dependência apenas do número quântico n) indicada pela ***Equação de Schrödinger***. No entanto, ela apresentou uma nova degenerescência entre os níveis de energia $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ do átomo de hidrogênio (H). Registre-se que, de um modo geral, o nível de energia das órbitas atômicas é caracterizado por: $n\ell_j$, onde n, ℓ, j ($j = \ell \pm s$) representam, respectivamente, os números quânticos: ***principal*** (n, correspondente a energia), ***momento angular orbital*** (ℓ), ***spin*** (s =1/2) e ***momento angular total*** (j).

Outro resultado importante da ED decorreu de sua solução para o elétron livre. Nesta solução, Dirac encontrou que ela não só descrevia o elétron com momento $\vec{p}$ e energia positiva, mas tinha outra solução que descrevia partículas idênticas a elétrons, porém com carga positiva e energia negativa. Ele chamou essas partículas de "buracos" e afirmou que eles ocupavam todos os estados de energia negativa, o famoso "mar de Dirac". Nessa época, Dirac não havia entendido bem essa outra solução. Assim, esse "buraco" foi interpretado como sendo um próton, em 1929 (*Zeitschrift für Physik* **56**, p. 330), pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955) e, ainda em 1929 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A126**, p. 360) e em 1930 (*Nature* **126**, p. 605), pelo próprio Dirac. Essa interpretação decorria do fato de que, naquela época, só se conheciam dois tipos de partículas elementares: elétrons e prótons. Por sua vez, o núcleo atômico era considerado formado de prótons e elétrons. Porém, Dirac não ficou muito satisfeito com essa proposta, uma vez que já se sabia que os prótons tinham massa cerca de 1.840 vezes maior do que à dos elétrons.

Ainda em 1930, em trabalhos independentes, os físicos, o norte-americano Julius Robert Oppenheimer (1904-1967) (*Physical Review* **35**, p. 562) e o russo Igor Yevgenyevich Tamm (1895-1971; PNF, 1958) (*Zeitschrift für Physik* **62**, p. 545), mostraram que o "buraco" não poderia ser um próton, pois, desse modo, tornaria o átomo instável por causa do processo: próton + elétron $\rightarrow$ fótons. Em 1931 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A133**, p. 60), Dirac aceitou a ideia de que o "buraco" seria uma nova espécie de partícula, até então desconhecida pelos físicos experimentais, a qual chamou de "anti-elétron". Destaque-se que essa "nova partícula" foi descoberta pelo físico norte-americano Carl David Anderson (1905-1991; PNF, 1935), em 1932 (*Proceedings of the Royal Society of London* **A41**, p. 405; *Science* **76**, p. 238), e que recebeu o nome de ***pósitron*** (e^+). É interessante destacar que, em 1929, os físicos, o russo Dmitry Vladimirovich Skobeltzyn (1892-1992) (*Zeitschrift für Physik* **54**, p. 686) e, em 1930 (*Nature* **125**, p. 636), o italiano Bruno Benedetti Rossi (1905-1994), encontraram evidências experimentais da existência do "buraco" previsto por Dirac.

Ainda com relação ao "mar de Dirac", havia a seguinte questão. Como vimos acima, ao aplicar sua equação aos elétrons livres, Dirac observou que estes poderiam existir em estados de energia negativa e contínua, variando de $-mc^2$ até $-\infty$. No entanto, a ***segunda quantização diraciana*** mostrava que um elétron em um estado bohriano excitado perde energia espontaneamente por emissão de um fóton (γ), caindo, como consequência, no estado fundamental.

Tendo em vista o resultado acima, o físico sueco Oskar Benjamin Klein (1894-1977), em 1929 (*Zeitschrift für Physik* **53**, p. 157) apresentou a seguinte questão, conhecida como **Paradoxo de Klein**:

Um elétron no estado fundamental pode emitir um fóton com energia ($h\nu$) maior que o dobro de sua energia de repouso ($2mc^2$), ou seja, $h\nu > 2mc^2$ e cair para um estado de energia negativa como havia sido proposto pela equação de Dirac. Uma vez nesse estado, o elétron continuaria emitindo fótons já *que não havia limite mínimo de energia negativa, pois essa se estende até - ∞. Isso, contudo, não é observado experimentalmente.*

A solução para esse “paradoxo” foi apresentada pelo próprio Dirac, nos artigos de 1929 e 1930, citados anteriormente, nos quais afirmou que, em condições normais, os estados de energia negativa estão todos ocupados por elétrons, o ``mar de Dirac”, já referido. Assim, as transições catastróficas previstas por Klein eram proibidas pelo ***princípio da exclusão de Pauli***, de 1925, referido acima. Ainda nesses trabalhos, Dirac afirmou que um desses elétrons pode absorver um fóton com energia ($h\nu$) maior do que o dobro de sua massa de repouso ($2mc^2$) – $h\nu > 2mc^2$- e tornar-se um estado de energia positiva; como resultado, um ``buraco” ou ``anti-elétron” é criado nesse ``mar”, que corresponde a um próton, conforme já destacamos anteriormente. Desse modo, estava explicado o **Paradoxo de Klein**.

ANTERIOR SEGUINTE