José Maria Filardo Bassalo
www.bassalo.com.br

As Integrais Elípticas e as Integrais Eulerianas de Primeira (Função Beta) e Segunda (Função Gama) Espécies.

Em alguns verbetes desta série, vimos que os cálculos da quadratura (áreas de figuras) e da cubatura (volumes de sólidos) contribuíram para o desenvolvimento do hoje conhecido ***Cálculo Integral***. Por outro lado, o estudo do comportamento geométrico de curvas (p.e.: concavidade, pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão etc.) levou ao desenvolvimento do hoje conhecido ***Cálculo Diferencial***. Para esse desenvolvimento, muitos matemáticos contribuíram como, por exemplo, o grego Arquimedes de Siracusa (287-212), o alemão Johannes Kepler (1571-1630), o italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), o francês Pierre Fermat (1601-1665), os ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Sir Isaac Newton (1642-1727), o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e os irmãos suíços James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705) e John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748). Para detalhes, ver: Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (John Wiley and Sons, 1968); Dirk Jan Struik, **A Source Book in Mathematics, 1200-1800** (Harvard University Press, 1969); Morris Kline, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972).

Outro tipo de problema que também contribuiu para o desenvolvimento do ***Cálculo*** (***Diferencial*** e ***Integral***) foi o da ***retificação*** de curvas, isto é, a determinação do comprimento de arcos das curvas. Esse era um problema um pouco mais complicado, uma vez que os matemáticos que estavam interessados nesse tipo de questão eram obrigados a procurar curvas, cuja retificação reduzia-se a problema de quadraturas de curvas conhecidas. Assim, por volta de 1650, quase ninguém acreditava que o comprimento de uma curva poderia ser exatamente igual ao comprimento de uma linha reta, ou seja, que uma curva pudesse ser retificada. Uma das primeiras curvas a ser retificada foi a parábola cúbica ($y = x^3$), de maneira independente, pelos matemáticos, o inglês William Neil (1637-1670), em 1657, e o holandês Hendrik van Heuraet (1633-c.1660), em 1658. Ainda em 1658, o arquiteto e matemático inglês Sir Christopher Wren (1632-1723) retificou a ciclóide. É oportuno destacar que esta curva já havia sido antes retificada pelo matemático francês Gilles Personne de Roberval (1602-1675), porém não a tornou pública. Os cálculos de retificação de curvas foram apresentados por Wallis em seu livro **Tractatus Duo, Prior de Cycloide, Posterior de Cissoide** ("Dois Tratados, o Primeiro sobre a Ciclóide, e o Segundo sobre a Cissóide"), de 1659. Em notação atual, o comprimento elementar (ds) de um arco de curva é dado por: $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

A questão da ***retificação*** de curvas foi retomada pelo matemático italiano Giulio Carlo di Fagnano, Marquês de Toschi (1682-1766), entre 1714 e 1718, em uma série de artigos publicados no *Giornali dei Letterati d´Italia* (números **19-30**) sobre a ***retificação*** de algumas curvas (elipse, hipérbole, ciclóide e lemniscata) tratadas pelos irmãos Bernoulli, nos quais mostrou que a ***retificação*** não poderia ser feita por meio de funções elementares, já que ela envolvia radicais. Em 1750, ele reuniu esses trabalhos no livro **Produzioni Matematiche** ("Produções Matemáticas"). Quando esse livro foi recebido pela *Academia de Berlim*, em 1751, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) foi solicitado para dar um parecer. Ao lê-lo, logo percebeu a importância de seu conteúdo para a integração de equações diferenciais envolvendo radicais. Assim, começou uma série de trabalhos sobre esse assunto e que foram comunicados à *Academia Petropolitana*, entre 1756 e 1759 [*Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* (1756-1757) **6**, p. 37; 58; *Novi Commentarii Academiae*

Imperialis Scientiarum Petropolitanae (1758-1759) **7**, p. 3]. Nesses trabalhos, Euler deduziu um resultado importante hoje conhecido como ***Teorema da Adição das Integrais Elípticas***:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

onde R[x(y)] é um polinômio do quarto grau, sendo que cada uma dessas integrais é dada por arcos de cônicas [círculo, elipse, parábola e hipérbole, descobertas por matemático grego Apolônio de Perga (c.261-c.190)] ou lemniscata. No entanto, essa descoberta de Euler – realizada quase por acaso – permitiu-lhe comparar não apenas aqueles arcos, mas, também, arcos de curvas transcendentais dadas por $\int P(x)dx/\sqrt{R(x)}$, com P(x) sendo uma função racional e R(x) um polinômio do quarto grau.

Contudo, essa descoberta de Euler sobre as **Integrais Elípticas** (IE) apresentava dificuldades, pois se restringia apenas a considerações geométricas, segundo o próprio Euler destacou no Volume I de seu tratado **Instituitiones Calculi Integralis** ("Livros sobre Cálculo Integral"), composto de três volumes, publicados entre 1768 e 1770. O estudo analítico das IE foi conduzido pelo matemático francês Adrien Marie Legendre (1752-1833) em uma série de trabalhos realizados entre 1768 e 1826 e que foram reunidos no tratado intitulado **Traité des Fonctiones Elliptiques** ("Tratado das Funções Elípticas"), composto de dois volumes publicados em 1825 e 1826. É oportuno destacar que, embora Legendre usasse o termo ***função elíptica***, havia um pouco de controvérsia em torno do mesmo. O conceito atual de ***função elíptica*** foi introduzido pelos matemáticos, o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), em 1826 (somente publicado em 1841, no *Mémoires de Sçavans Étrangers* **7**, p. 176), e o alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), em 1829 (Kline, op. cit.). Em notação atual, as IE são de três espécies, respectivamente definidas por:

$$F(\phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta(k,\phi)}; \quad E(\phi) = \int \Delta(k,\phi)d\phi; \quad \Pi(\phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta(k,\phi)(1+n\,sen^2\phi)},$$

onde n é qualquer constante e $\Delta(k,\phi) = \sqrt{1-k^2 sen^2\phi}$, com $0 \leq k \leq 1$.

Vejamos, agora, as **Integrais Eulerianas**. Essas integrais decorreram do estudo do problema da interpolação, isto é, inserir valores em tabelas de funções logarítmicas e trigonométricas, problema esse tratado por Wallis e pelos matemáticos, o escocês James Stirling (1692-1770), o suíço Daniel Bernoulli (1700-1782) (filho de John), e o russo Christian Goldbach (1690-1764), e no qual havia a questão de encontrar uma expressão para calcular o ***fatorial*** de um número racional. Para n inteiro, tem-se: n! = 1×2 ×3 × ... × n. Contudo, para qualquer n, o problema era mais difícil. Por exemplo, em 1730, Stirling publicou o livro intitulado **Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitatum** ("Método Diferencial com um Tratado sobre Somação e Interpolação de Séries Infinitas") no qual demonstrou que quando n >> 1, tem-se: n! ~ $(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$, onde e é a base dos logaritmos neperianos (ℓn) (ver verbete nesta série). É oportuno destacar que nesse livro Stirling apresentou sua hoje famosa ***Fórmula de Stirling*** [fórmula que calcula ℓn (n!)], e que a notação n! foi introduzida pelo matemático francês Christian Kramp (1760-1826) em seu livro **Elements d´Arithmétique Universelle** ("Elementos de Aritmética Universal"), editado em 1808 (wikipedia/Christian_Kramp).

O problema do cálculo de n! foi também objeto de estudo por parte de Euler. Com efeito, em cartas que trocou com Goldbach, em 13 de outubro de 1729 e 08 de janeiro de 1730, Euler discuti a solução desse problema e a formalizou, em 1731, em um trabalho publicado em 1738 [*Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* (*1730-1731*) **5**, p. 36]. Inicialmente, Euler obteve n! (para n inteiro) por intermédio da integral (Kline, op. cit.):

$$\int_0^1 x^e (1-x)^n dx = \frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)},$$

sendo e um número qualquer. Contudo, para uma expressão de n!, para qualquer valor de n, Euler escreveu que:

$$n! = \int_0^1 [-\ell n(x)]^n dx.$$

É interessante destacar que, apenas em 1771 Euler preparou um trabalho [publicado em 1772 na *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* (*1771*) **16**, p. 91], no qual demonstrou a relação entre as duas integrais vistas acima fazendo a seguinte mudança de variável:

$$-\ell n(x) = t \rightarrow x = e^{-t}; \; x = 0 \rightarrow t = \infty; \; x = 1 \rightarrow t = 0,$$

$$dt = -dx/x \rightarrow dx = -x\,dt \rightarrow dx = -e^{-t}\,dt \rightarrow$$

$$n! = \int_\infty^0 t^n(-e^{-t})dt = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Ainda no artigo de 1771, Euler demonstrou que existia uma relação entre as duas integrais, denominadas por Legendre em sua obra intitulada **Exercices de Calcul Integral** ("Exercícios de Cálculo Integral"), constituída de três volumes, editados em 1811 (Volumes I e III) e 1817 (Volume II), de **Primeira Integral Euleriana** ou ***Função Beta*** [B(m, n)] e **Segunda Integral Euleriana** ou ***Função Gama*** [Γ(n+1)] representadas, respectivamente, por (obtidas por Euler, em 1781, segundo Kline, op. cit.):

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx; \quad \Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dt,$$

sendo a relação acima referida dada por [ver a demonstração em: José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, **Elementos de Física Matemática I** (Livraria da Física, 2010)]:

$$B(m, n) = \Gamma(m)\,\Gamma(n)/\Gamma(m+n).$$

É interessante registrar que Euler mostrou que Γ(n + 1) = n Γ (n), assim como calculou: Γ(1/2), Γ(3/2), Γ(5/2) ... . Por sua vez, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1813 (*Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores* **II**), estudou a Γ quando escreveu que: Γ(n + 1) = π (n). Registre-se, também, que a notação B(m, n) [B é a representação maiúscula da letra grega beta (β)] foi dada pelo astrônomo, físico e matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) (wikipedia/Beta_function).

Para concluir este verbete, é oportuno dizer que a ***Função Gama Euleriana*** é uma ferramenta matemática importante para calcular os ***Diagramas de Feynman*** em reações envolvendo as partículas mediadoras (***fóton***, ***glúon***, $W^{+/-}$, Z^0) das interações físicas entre as partículas elementares constituintes da matéria. [Marcelo Otávio Caminha Gomes, **Teoria Quântica dos Campos** (EDUSP, 2002)].