



SEARA DA CIÊNCIA CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo



Movimento Browniano, Einstein e Bachelier.

Em 1828 (*Philosophical Magazine* 4, p. 161; *Annalen der Physik und Chemie* 14, p. 294), o botânico escocês Robert Brown (1773-1858) realizou experiências nas quais observou, com a ajuda de um microscópio, que numa suspensão de grãos de pólen (da planta **Clarckia pulchella**) em água, cada grão se movia irregularmente. Como esse fenômeno repetiu-se com todas as espécies de substâncias orgânicas, Brown acreditou haver encontrado a **molécula primitiva** da matéria viva. No decorrer dessas experiências, Brown observou que o mesmo fenômeno acontecia com as substâncias inorgânicas ao distribuir partículas de corante em água, havendo, então, concluído que toda a matéria viva era constituída de moléculas primitivas. Mais tarde, esse fenômeno passou a ser conhecido como **movimento Browniano** (MB).

Depois da observação de Brown, muitos cientistas fizeram novas investigações sobre o MB, conforme se pode ver no artigo sobre esse movimento apresentado nesse mesmo site (Ver [O MOVIMENTO BROWNIANO](#)), nos comentários que o físico norte-americano John Stachel descreveu no livro **O Ano Miraculoso de Einstein: Cinco Artigos que Mudaram a Face da Física** (EDUFRJ, 2001) e nas Notas que o físico alemão Reinhold Fürth apresentou no livro que ele próprio editou sobre os trabalhos do físico germano-norte-americano Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921) a respeito do MB (EINSTEIN, A. **Investigations on the Theory of the Brownian Movement**, Dover Publications, Inc., 1956). Vejamos essas investigações. Em 1858, o químico e físico franco-alemão Henri Victor Regnault (1810-1878) acreditava que esse movimento era devido ao aumento irregular da temperatura da água em decorrência da incidência da luz. Por sua vez, em 1863, o matemático e físico alemão Christian Wiener (1826-1896) atribuiu esse movimento a *movimentos internos, próprios do estado líquido*. Essa idéia de que "a agitação desordenada das moléculas da água, produzida pelo calor", era a origem do MB, foi defendida por alguns físicos, como o italiano Giovanni Cantoni (1818-1897), em 1867 (*Nuovo Cimento* 27, p. 156), e pelos jesuítas belgas Joseph Delsaulx (1828-1891), em 1877, e Ignace J. J. Carbonnelle (1829-1889), em 1877/1880. Com base também nessa idéia o físico francês Louis-George Gouy (1854-1926) fez as primeiras medições precisas desse fenômeno físico, chegando, inclusive, em 1888 (*Journal de Physique* 7, p. 561), a medir a velocidade das diferentes partículas em suspensão, e encontrá-la da ordem de uma milionésima centésima parte da velocidade molecular. Contudo, esse resultado foi colocado em dúvida pelo citologista suíço Karl Wilhelm von Naegeli (1817-1891), em 1870, ao mostrar, usando o Teorema da Equipartição da Energia, que aquela velocidade, em razão das massas comparativamente grandes das referidas partículas, seria desprezivelmente pequena. Por outro lado, uma origem elétrica para o MB, considerada por William Stanley Jevons (1835-1882), em 1870, foi rejeitada por Dancer, ainda em 1870, e pelo químico escocês Sir William Ramsay (1852-1916; PNQ, 1904), em 1877. Este, ao concordar com a hipótese de colisão molecular, chegou em 1892 a afirmar que alguns aspectos da pressão osmótica poderiam ser explicados por esse movimento. Em 1881, Bodoszewski observou esse movimento em gases e, em 1900 (*Annalen der Physik* 2, p. 843), o meteorologista alemão Felix Maria Exner (1876-1930) estabeleceu que a velocidade desse movimento decresce com o aumento do tamanho das partículas e aumenta com a elevação da temperatura.

Foi Einstein quem começou a estudar matematicamente o MB em uma série de artigos escritos a partir de 1905 [*Annalen der Physik* 17, p. 549 (1905); 19, p. 371 (1906); 22, p. 569 (1907); *Zeitschrift für Elektrochemie* 13, p. 41 (1907); 14, p. 235 (1908)]. Com efeito, no trabalho de 1905, ao aplicar a Teoria Cinética dos Gases [**lei de Stokes** (1845) e **lei de van't Hoff** (1886)] aos choques entre as moléculas do líquido e as do colóide em suspensão e a Teoria da Difusão [esta tratada como um **processo Markoviano**, conforme foi demonstrado pelo matemático russo Andrey Markov (1856-1922), em 1906, em seu estudo

sobre os processos estocásticos] deduziu então uma expressão para o valor médio do deslocamento (λ_x) de partículas (pequenas esferas de raio P) na direção do eixo dos x no tempo t , dada por:

$$\lambda_x = \sqrt{t} \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta kP}},$$

onde R é a constante universal dos gases, T a temperatura absoluta, N é o número de Avogadro e k a viscosidade do líquido. Essa **Fórmula de Einstein do Movimento Browniano** mostra que N pode ser determinada experimentalmente, uma vez que todos os parâmetros nela envolvidos são encontrados também experimentalmente. Desta maneira, ela representa uma forte evidência da constituição atômica da matéria. Aliás, registre-se que, no trabalho de 1905, Einstein chegou a calcular que uma partícula em suspensão na água ($k = 0,0135$, $T = 17^\circ\text{C}$) deveria avançar, em média, 0,006 mm em um minuto. Ele considerou $N = 6 \times 10^{23}$, valor conhecido da Teoria Cinética dos Gases.

É oportuno observar que essa **Fórmula de Einstein** foi também obtida, independentemente, pelo físico polonês Marian von Smolan-Smoluchowski (1872-1917), em 1906 (*Annalen der Physik* **21**, p. 756) e pelo físico francês Paul Langevin (1876-1946), em 1908 (*Comptes Rendus Hebdomadaires de Séances de l'Académie de Sciences de Paris* **146**, p. 530), usando modelos completamente diferentes do usado por Einstein. Smoluchowski, por exemplo, usou a Teoria das Flutuações, e Langevin, por sua vez, assumiu que o MB satisfaz a hoje famosa **Equação de Langevin**:

$$m \frac{dv}{dt} = -\eta v + X + F(t),$$

onde ηv representa a **força de fricção**, X a **força externa** e $F(t)$ a **força de flutuação**, forças essas que atuam numa partícula microscópica (por exemplo, uma partícula coloidal) de massa m , deslocando-se em um líquido de viscosidade η , com a velocidade v . Note-se que $F(t)$ significa a força exercida pelas moléculas do líquido sobre a partícula.

A confirmação experimental da **Fórmula de Einstein-Smoluchowski-Langevin** foi conseguida em vários trabalhos experimentais. Assim, em 1908, o físico francês Louis-César-Victor Maurice, Duque de Broglie (1875-1960), a demonstrou em sua Tese de Doutorado, usando partículas de ferro suspensas em gases. O também físico francês Jean Baptiste Perrin (1870-1942; PNF, 1926), em 1909 (*Annales de Chimie et Physique* **18**, p. 1), usou-a para determinar N e obter o seguinte valor: $N = 68,2 \times 10^{22}$ moléculas/mol.

Registre-se que trabalhos mais elaborados sobre o **Movimento Browniano** foram realizados pelo químico sueco Theodor Svedberg (1884-1971; PNQ, 1926), que os reuniu no livro intitulado **Die Existenz der Moleküle**, publicado em Leipzig, em 1912. Por sua vez, em 1923 (*Journal of Mathematical Physics* **2**, p. 131), o matemático norte-americano Norbert Wiener (1894-1964) apresentou uma formulação matemática mais precisa para o **caminho aleatório** ("random walk"), ao considerar a posição de uma "partícula Browniana" como um aspecto importante em um processo estocástico.

É oportuno salientar que, somente na década de 1960, foi descoberto que a lei do **Movimento Browniano**, cuja característica fundamental, conforme registramos acima, é o "random walk", havia sido descoberta (em outro contexto) pelo matemático francês Louis Bachelier (1870-1946), em sua Tese de Docteur em Sciences Mathématiques, intitulada **Théorie de la Spéculation**, defendida em 29 de março de 1900 na Academia de Paris, sendo seu orientador o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912). Essa tese (publicada, ainda em 1900, nos *Annales*

Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 17, p. 21), que trata de opções de preços ("random walk") em mercados financeiros especulativos, recebeu as piores notas de seus examinadores e, portanto, foi rejeitada. Em vista disso, ela não foi considerada por seus professores e contemporâneos e, em consequência dessa rejeição, ele terminou sua vida como um obscuro professor em Besançon, capital de Doubs, departamento da região France-Comté, no leste da França (Ver: <http://cepa.newschool.edu/het/profiles/bachelier.htm>).

Segundo os físicos, o italiano Rosário Nunzio Mantegna (n. 1960) e o norte-americano Harry Eugene Stanley (n. 1941) em seu livro **An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance** (Cambridge University Press, 2001), o trabalho de Bachelier e seu desenvolvimento, principalmente o **Modelo de Opção de Preço de Black & Scholes** (*Journal of Political Economics* 81, p. 637, 1973), representam hoje um papel extremamente importante no Mercado Financeiro. Registre que o termo **ECONOFÍSICA** foi criado por Stanley, em 1996 (*Nature* 379, p. 804). [Este verbete é em homenagem ao físico-economista cearense Carlos Lenz César (n.1955) que chamou a minha atenção para o trabalho de Bachelier.]

[Página Inicial](#)

[ANTERIOR](#)

[SEGUINTE](#)