SEARA DA CIÊNCIA

CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo

Hamilton, Maxwell, Heaviside, Gibbs e a Análise Vetorial.

O **operador nabla** (∇) bastante usado no Cálculo Vetorial, foi utilizado pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), em seu célebre livro intitulado **Lectures on Quaternions**, publicado em 1853. Esse símbolo, que é o delta grego invertido, foi denominado por Hamilton de **nabla** porque se parece com um antigo instrumento musical hebreu, que tinha esse mesmo nome. Tal operador, hoje denominado de **gradiente**, tem a seguinte representação, em um sistema de coordenadas cartesianas:

$$\nabla \equiv \vec{I}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{J}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{K}\frac{\partial}{\partial z},$$

onde $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ representam, respectivamente, os versores dos eixos coordenados cartesianos.

Por intermédio da aplicação desse operador diferencial sobre uma função de ponto vetorial [$\vec{F}(\vec{r})$], Hamilton obtinha o seu **quatérnio**, constituído de uma parte escalar (S) e de uma parte vetorial (V), assim definidos (notação atual):

$$\nabla\vec{F} = -\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{I} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{J} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{K}.$$

O físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879), em seu famoso livro intitulado **A Treatise on Electricity & Magnetism**, publicado em 1873, utilizou os quatérnios Hamiltonianos, porém nas suas formas separadas, para as quais deu as seguintes notações: $S\nabla\vec{F}$(a parte escalar de $\nabla\vec{F}$) e $V\nabla\vec{F}$(a parte vetorial de $\nabla\vec{F}$). Por outro lado, Maxwell chamou a parte escalar de **convergência**, uma vez que a mesma já havia aparecido muitas vezes no estudo da Hidrodinâmica, pois, quando $\vec{F}$ é a velocidade de um fluido, $S\nabla\vec{F}$ representa o fluxo ou a quantidade líquida por unidade de volume e por unidade de tempo que flui através de um orifício. A parte vetorial ($V\nabla\vec{F}$) recebeu de Maxwell o nome de rotação ou rotacional, pois a mesma representa duas (2) vezes a taxa de rotação de um fluído em um ponto, quando $\vec{F}$ representa a velocidade desse fluido em escoamento. [É oportuno registrar que, mais tarde, o matemático e filósofo inglês William Kingdon Clifford (1845-1879) - o inventor da Teoria dos Biquatérnios - chamou - $S\nabla\vec{F}$ de **divergência**.] A repetição do operador ∇, isto é, ∇^2, recebeu de Maxwell o nome de **operador de Laplace**. Este, por sua vez, quando aplicado a uma função escalar (p.e., q), representa o excesso do valor dessa função em um dado ponto, sobre o seu valor médio na vizinhança. Em vista disso, Maxwell chamou de **concentração** a essa nova função $\nabla^2 q$. [Note-se que o matemático inglês Robert Murphy (? - 1843) introduziu, em 1833, a notação Δ para representar ∇^2, segundo nos conta o matemático norte-americano Morris Kline (1908-1992), em seu livro **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972).]

Em 1871, Maxwell fez três grandes demonstrações (na notação atual):

$$\nabla \times \nabla V = 0, \qquad \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0, \qquad \nabla^2\vec{F} \equiv \Delta\vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = 0,$$

onde: ∇V significa o "gradiente" da função escalar V, e $\nabla \cdot \vec{F}, \nabla \times \vec{F}, \Delta \vec{F}$, significam, respectivamente, a "divergência", o "rotacional" e o "laplaciano" da função vetorial $\vec{F}$.

É oportuno ainda registrar que no livro de Maxwell citado acima, ele sintetiza as leis experimentais do Eletromagnetismo em quatro equações diferenciais, as famosas **Equações de Maxwell** e, com elas, conseguiu a unificação da Óptica, da Eletricidade e do Magnetismo, ao demonstrar que: *A luz é uma onda eletromagnética*. Aliás, parece haver sido o físico inglês Michael Faraday (1791-1862) quem chamou a atenção de Maxwell sobre a existência de uma relação íntima entre os fenômenos eletromagnéticos e ópticos.

Apesar da grande divulgação da Teoria dos Quatérnios, principalmente pelo físico e matemático inglês Peter Guthrie Tait (1831-1901) que, em seus artigos encorajava os físicos a usarem essa ferramenta matemática Hamiltoniana, eles continuavam a preferir escrever suas equações em componentes cartesianas, até que o físico e químico norte-americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903) e, independentemente, o físico e engenheiro eletricista inglês Oliver Heaviside (1850-1925), nas duas últimas décadas do Século 19, desenvolveram a **Análise Vetorial** envolvendo novos entes matemáticos, os **vetores**, não mais constituintes de um quatérnio, e sim uma grandeza matemática independente, e denotada por (na notação atual): $\vec{F} = F_x \vec{I} + F_y \vec{J} + F_z \vec{K}$, e com as hoje conhecidas operações de Álgebra (produtos escalar e vetorial) e Análise (gradiente, divergência, rotacional e laplaciano) Vetoriais. Gibbs, por exemplo, entre 1881 e 1884, distribuía privadamente entre seus estudantes um pequeno panfleto intitulado **Elements of Vector Analysis**. Por sua vez, Heaviside, nos anos da década de 1880, escreveu artigos no jornal *Electrician* nos quais usava a Análise Vetorial. Em um desses artigos, escrito em 1885, ele demonstrou, usando essa Análise, o Teorema da Conservação da Energia Eletromagnética, que havia sido demonstrado pelo físico inglês John Henry Poynting (1852-1914), em 1883. Em 1893, Heaviside escreveu seu famoso livro intitulado **Electromagnetic Theory** no qual apresentou a formulação matemática do Eletromagnetismo, inclusive as célebres **Equações de Maxwell**, na linguagem dos operadores diferenciais vetoriais.

Página Inicial ANTERIOR SEGUINTE