



SEARA DA CIÊNCIA CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo



A Versão Relativista da Equação de Schrödinger. .

Antes de escrever os seus célebres trabalhos que deram início ao estudo da **Mecânica Quântica Não-Relativista do Elétron**, o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933) tentou fazer uma descrição relativista do elétron no átomo de hidrogênio (H). No entanto, como não conseguiu com a mesma os resultados que o físico alemão Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) havia obtido, em 1916 (*Sitzungsberichte Bayerischen Akademie Wissenschaften zu München*, p. 459) para os níveis de energia do H , Schrödinger desencorajou-se e, temporariamente, abandonou esses estudos, que mais tarde foram encontrados em um livro de notas, sob o título **H-Atom, Eigenschwingungen**, provavelmente, escrito em dezembro de 1925, segundo nos conta o físico-químico norte-americano Walter John Moore (n.1918) no livro **A Life of Erwin Schrödinger** (Cambridge University Press, 1994). Ainda segundo esse livro, Schrödinger teria usado a Tese de Doutorado do físico francês, o Príncipe Louis Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987; PNF, 1929), apresentada à *Faculdade de Ciências da Universidade de Paris*, em 1924, com o título: *Recherche sur la Théorie des Quanta*.

Depois dessa frustrada pesquisa, Schrödinger voltou a trabalhar nesse mesmo assunto, porém, desta vez, tratando o movimento do elétron como não-relativista. Em seis artigos publicados nos *Annales de Physique Leipzig* 79, pgs. 361; 489; 734; 747; 80, p. 437; e 81, p. 136, todos em 1926 e sob o título *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Schrödinger desenvolveu a hoje conhecida Mecânica Quântica Ondulatória, cujo principal resultado é uma equação para as órbitas estacionárias dos elétrons do átomo de hidrogênio, a famosa **equação de Schrödinger**:

$$\Delta \psi(x, y, z) + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} [E - V(x, y, z)] \psi(x, y, z) = 0$$

onde $\psi(x, y, z)$ é conhecida como função de onda de Schrödinger. Registre-se que Ψ foi interpretada, em 1926 (*Zeitschrift für Physik* 37; 38, pgs. 863; 803), como uma **amplitude de probabilidade** pelo físico alemão Max Born (1882-1970; PNF, 1954).

Para obter os níveis de energia E (autovalores) do átomo H por intermédio da equação acima, Schrödinger utilizou as técnicas matemáticas encontradas no livro **Methoden der Mathematischen Physik** dos matemáticos alemães Richard Courant (1888-1972) e David Hilbert (1862-1943), publicado em 1924. Ao encontrar um aspecto discreto de energias, idêntico ao obtido pelo físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885-1962; PNF, 1922) em seu célebre **modelo atômico** formulado em 1913, Schrödinger observou que a **quantização** da energia decorria, automaticamente, de sua formulação matemática. Aliás, o título de seus trabalhos - **Quantização como um problema de autovalores** - sintetiza os resultados por ele obtidos.

É interessante registrar que no artigo publicado nos *Annales* 79, p. 734, Schrödinger demonstrou o isomorfismo entre a sua **Mecânica Ondulatória** (MO) e a **Mecânica Matricial** (MM) que Born, e os físicos alemães Werner Karl Heisenberg (1901-1976; PNF, 1932) e Ernst Pascual Jordan (1902-1980) haviam desenvolvido entre 1924 e 1925. O primeiro trabalho sobre a MM foi realizada por Born, em 1924 (*Zeitschrift für Physik* 26, p. 379), ao apresentar um novo tratamento para as "quantidades de transição" da Teoria Quântica Planckiana. Em 1925 (*Zeitschrift für Physik* 33, p. 879), Heisenberg mostrou que as "quantidades de transição

Bornianas" satisfaziam a uma álgebra não-comutativa, álgebra essa que foi identificada por Born como sendo a Álgebra Matricial desenvolvida pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895), em 1858. Em 1925 (*Zeitschrift für Physik* 34, p. 858), Born e Jordan mostraram que as "quantidades de transição" correspondiam aos quadrados das amplitudes de vibração dos "osciladores harmônicos Planckianos". Nesse mesmo trabalho, Born e Jordan demonstraram, pela primeira vez, a famosa relação de comutação entre as matrizes p e q , correspondentes ao momento linear e a posição de uma partícula quântica, isto é: $pq - qp = [p, q] = \hbar / 2\pi \hat{1}$, onde $\hat{1}$ é a matriz unitária. Registre-se, também, que o isomorfismo entre MO e MM foi demonstrado, independentemente, pelo físico norte-americano Carl Eckart (1902-1973), ainda em 1926 (*Physical Review* 28, p. 711). Aliás, o físico austro-suíço Wolfgang Pauli Junior (1900-1958; PNF, 1945), ainda em 1926, escreveu uma carta a Jordan na qual dizia haver demonstrado esse formalismo.

Voltemos à versão relativista da **equação de Schrödinger** (ES). Logo que houve a publicação dessa equação, que descrevia o movimento de uma partícula em uma região de potencial $V(x, y, z)$, vários físicos tentaram obter a sua versão relativista. O primeiro deles foi o físico sueco Oskar Benjamin Klein (1895-1977), em abril de 1926 (*Zeitschrift für Physik* 37, p. 895). Em junho de 1926 (*Zeitschrift für Physik* 38, p. 242), o físico russo Valdimir Alexandrovich Fock (1898-1974) apresentou um tratamento relativístico do movimento Kleperiano dos corpos de acordo com a Mecânica Ondulatória.

Uma dedução formal da equação do movimento relativista de uma partícula (de massa de repouso m , de velocidade v e momento linear $p=mv$) foi realizada por de Broglie, em julho de 1926 (*Comptes Rendus à l'Academie des Sciences de Paris* 183, p. 447). Ele partiu da equação relativista da energia ($E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$) e usou as seguintes substituições (aliás, sugeridas por Schrödinger): $\vec{p} = -i\hbar \nabla$ e $E = i\hbar \partial / \partial t$, com $\hbar = h / 2\pi$. Em setembro de 1926 (*Zeitschrift für Physik* 40, p. 117), o físico alemão Walter Gordon (1893-1940) chegou ao mesmo resultado de de Broglie, ao fazer o tratamento relativista do **efeito Compton**, este conhecido desde 1923. Essa equação relativista é hoje conhecida como **equação de Klein-Fock-Gordon** (EK-F-G) (em notação atual):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

É oportuno acrescentar que, ainda em 1926, essa equação foi obtida, independentemente, pelo químico belga Théophile de Donder (1872-1957) e H. van den Dungen (*Comptes Rendus à l'Academie des Sciences de Paris* 183, p. 22), por Schrödinger (*Annales de Physique Leipzig* 81, p. 109) e J. Kudar (*Annales de Physique Leipzig* 81, p. 632). Ainda é interessante acrescentar que Pauli, por volta de abril de 1926, havia demonstrado a EK-F-G, porém, como ela não era consistente com a equivalência entre as duas Mecânicas, a Ondulatória e a Matricial (equivalência essa que ele próprio havia demonstrado, conforme registramos acima), rejeitou tal equação, passando, então, a procurar uma outra versão relativista da EQ, sem lograr êxito. Essa nova versão foi obtida pelo engenheiro eletricitista e físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933), em 1928, conforme veremos a seguir.

Antes de chegar à versão relativista da EQ, Dirac trabalhou com a versão não-relativista da mesma. Com efeito, em 1925 (*Proceedings of the Royal Society of London* A109, p. 642), Dirac apresentou uma nova formulação da Mecânica Matricial, ao procurar uma conexão entre essa Mecânica e a Mecânica Hamiltoniana (MH). Assim, ele fez corresponder o comutador obtido por Born e Jordan ao **parêntesis ("brackets") de Poisson**, característico da MH, ou seja:

$$\sum_i \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) \equiv \{x, y\} \Rightarrow \frac{2\pi}{i\hbar} [x, y]$$

onde q_i e p_i são as variáveis canonicamente conjugadas da MH, e x, y representam duas quaisquer variáveis do sistema atômico. Segundo Dirac afirmou em 1980 (*Physics Today*, Maio, p. 15), ele chegou a essa correspondência durante uma longa e habitual caminhada que deu em um certo domingo de setembro de 1925.

Ainda em 1925, os físicos holandeses George Eugene Uhlenbeck (1900-1988) e Samuel Abraham Goudsmith (1902-1978) apresentaram na *Naturwissenschaften* 13, p. 973 o conceito de **spin** (s) - uma espécie de rotação interna do elétron - que poderia assumir dois valores: $s = \pm \hbar / 2$ ["up" (+) e "down" (-)]. Uma interpretação quanto-mecânica-Schrödingeriana desse **número quântico eletrônico** foi dada, em 1927, em trabalhos independentes de Pauli (*Zeitschrift für Physik* 43, p. 601) e do físico inglês Charles Galton Darwin (1887-1962) [neto do lendário naturalista Charles Robert Darwin (1809-1882)] (*Proceedings of the Royal Society of London* A115, p. 1). Para Pauli, $\vec{s} = \hbar \vec{\sigma} / 2$, onde $\vec{\sigma}$ são as famosas **matrizes (2 x 2) de Pauli**. Contudo, esse tratamento quântico de Pauli-Darwin permanecia ainda não-relativista e com o spin introduzido *ad hoc*.

Finalmente, em 1928 (*Proceedings of the Royal Society of London* A115; A118, pgs. 610; 351), Dirac apresentou a equação relativista do elétron - a hoje famosa **equação de Dirac** - na qual o spin do elétron aparece naturalmente. Sua expressão em notação atual é dada por:

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\Psi = 0,$$

onde γ^μ é a matriz (4x4) de Dirac, $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) e Ψ é o **spinor (1x4) de Dirac**.

A Mecânica Quântica desenvolvida por Dirac foi apresentada por ele no livro intitulado *The Principles of Quantum Mechanics*, publicado pela Oxford University Press, 1930. Nesse livro, ele apresenta a hoje famosa **função delta de Dirac** (δ), muito usada em Física para representar quantidades discretas por intermédio de uma função contínua. Aliás, é oportuno dizer que uma função desse tipo já havia sido sugerida pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1882, pelo físico e engenheiro electricista inglês Oliver Heaviside (1850-1925), em 1893, e Paul Hertz (1881-1940), em 1916.

Na conclusão deste verbete sobre a versão relativista da ES, destacarei três fatos curiosos e interessantes. O primeiro refere-se a grande frustração sentida pelo físico russo Lev Davidovich Landau (1908-1968; PNF, 1962) - que se tornou famoso por suas grandes contribuições ao entendimento da **supercondutividade** e da **superfluidez** - por "haver nascido tarde" e, por isso, não haver contribuído ao desenvolvimento da Mecânica Quântica, conforme ele sempre dizia aos seus alunos e amigos. O segundo fato relaciona-se com a pesquisa de Schrödinger sobre a aplicação da **equação de Dirac** ao elétron livre. Nessa pesquisa, publicada em 1930 (*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 418, ele descobriu que o elétron apresentava um movimento de frequência rápida (Zitterbewegung - "Tremedeira"), cuja amplitude $[\hbar / (4\pi mc)]$ era da ordem de 10^{-11} cm , resultante da interferência dos estados de energia positiva e negativa do próprio elétron. Além disso, o momento angular associado a essa "tremedeira", indicava que o elétron poderia ser imaginado se mover através do espaço livre descrevendo uma espiral fina e estreita, segundo nos conta Moore, no livro referido acima. Por fim, o terceiro fato a destacar está ligado à degenerescência, isto é, os mesmos valores dos estados de energia do elétron no átomo de hidrogênio com os mesmos números quânticos principal (n) e momento angular total ($j = \ell + s$, onde ℓ é o momento angular orbital e s é o momento angular intrínseco do elétron - spin) calculados pela **equação de Dirac**.

Observe-se que a solução dessa degenerescência, ocorrida nas décadas de 1930 e 1940, levou à formulação da **Eletrodinâmica Quântica Renormalizável**, desenvolvida nos trabalhos dos físicos, o japonês Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979; PNF, 1965), e os norte-americanos Richard Phillips Feynman (1918-1988; PNF, 1965) e Julian Seymour Schwinger (1918-1994; PNF, 1965), entre 1943 e 1949. [Maiores detalhes sobre aquela degenerescência e sua solução, ver: José Maria Filardo Bassalo, **Eletrodinâmica Quântica**, Editora Livraria da Física (SP), 2006.]

[Página Inicial](#)

[ANTERIOR](#)

[SEGUINTE](#)