



SEARA DA CIÊNCIA CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Bassalo



A Equação de Dirac e o "Paradoxo de Klein".

Em 1927 (*Proceedings of the Royal Society* A114, p. 243; 710), o físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984; PNF, 1933) publicou dois trabalhos nos quais considerou a função de onda de Schrödinger ψ (e sua conjugada $\bar{\psi}$) como operadores [em vez de números, como o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933) havia considerado, em 1926 (*Annales de Physique Leipzig* 79, p. 361; 489; 734; 747) ao apresentar sua famosa equação], porém sua álgebra era não-comutativa, isto é: $\psi\bar{\psi} \neq \bar{\psi}\psi$. Com esse procedimento, conhecido como Teoria Quântica da Emissão e Absorção da Radiação [também conhecida como segunda quantização, que considera os operadores criação (a^+), destruição (a^-) e número de ocupação ($N = a^+a^-$)], Dirac quantizou o campo eletromagnético, procedimento esse que deu origem ao desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED: "Quantum Electrodynamics"). Logo depois, em 1928 (*Proceedings of the Royal Society* A117; A118, p. 610; 351), Dirac formulou a Teoria Relativística do Elétron, conhecida como Equação de Dirac (ED) - $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Phi = 0$ -, onde γ^μ é a matriz de Dirac (matriz 4 X 4), $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), Φ é o spinor de Dirac (matriz coluna), m é a massa do elétron, e c é a velocidade da luz no vácuo. Essa equação apresentava resultados muito importantes, conforme se pode ver no livro intitulado **Paul Dirac: The Man and His Work** (Cambridge University Press, 1998), editado por Peter Goddard.

A ED conseguiu remover a degenerescência dos níveis de energia das órbitas eletrônicas Bohrianas (dependência apenas do número quântico n) indicada pela Equação de Schrödinger. No entanto, ela apresentou uma nova degenerescência entre os níveis de energia $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ do átomo de hidrogênio (H). Registre-se que, de um modo geral, o nível de energia das órbitas atômicas é caracterizado por: $n\ell_j$, onde n, ℓ, j ($j = \ell \pm 1/2$) representam, respectivamente, os números quânticos principal (energia), momento angular orbital e momento angular total. Observe-se que a "onda s", corresponde a $l=0$ e a "onda p", a $l=1$.

Um outro resultado importante da ED decorreu de sua solução para o elétron livre. Nessa solução, Dirac encontrou que ela não só descrevia o elétron com momento \mathbf{p} e energia positiva, mas tinha uma outra solução que descrevia partículas idênticas a elétrons, porém com carga positiva e energia negativa. Ele chamou essas partículas de "buracos" e afirmou que eles ocupavam todos os estados de energia negativa, o famoso "mar de Dirac". Nessa época, Dirac não havia entendido bem essa outra solução. Assim, esse "buraco" foi interpretado como sendo um próton, em 1929 (*Zeitschrift für Physik* 56, p. 330), pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955) e, em 1930 (*Proceedings of the Royal Society of London* A126, p. 360; *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 26, p. 361; 376; *Nature* 126, p. 605), pelo próprio Dirac. Essa interpretação decorria do fato de que, naquela época, só se conheciam dois tipos de partículas elementares: elétrons e prótons. Porém, Dirac não ficou muito satisfeito com essa proposta, uma vez que já se sabia que os prótons tinham massa cerca de 1.840 vezes maior do que a dos elétrons.

Ainda em 1930, em trabalhos independentes, os físicos, o norte-americano Julius Robert Oppenheimer (1904-1967) (*Physical Review* 35, p. 562) e o russo Igor Yevgenyevich Tamm (1895-1971; PNF, 1958) (*Zeitschrift für Physik* 62, p. 545), mostraram que o "buraco" não poderia ser um próton, pois, desse modo, tornaria o átomo instável por causa do processo: próton + elétron \rightarrow fótons. Em 1931 (*Proceedings of the Royal Society of London* A133, p. 60), Dirac aceitou a idéia de que o "buraco" seria uma nova espécie de partícula, até então desconhecida pelos físicos experimentais, a qual chamou de "anti-elétron". Destaque-se que essa "nova partícula" foi descoberta pelo físico norte-americano Carl David Anderson

(1905-1991; PNF, 1935), em 1932 (*Proceedings of the Royal Society of London* A41, p. 405; *Science* 76, p. 238), e que recebeu o nome de pósitron (e^+). É interessante destacar que, em 1929, em trabalhos independentes, os físicos, o russo Dmitry Vladimirovich Skobelzyn (1892-1992) (*Zeitschrift für Physik* 54, p. 686) e o italiano Bruno Benedetti Rossi (1905-1994), encontraram evidências experimentais da existência do "buraco" previsto por Dirac.

Ainda com relação ao "mar de Dirac", havia a seguinte questão. Como vimos acima, ao aplicar sua equação aos elétrons livres, Dirac observou que estes poderiam existir em estados de energia negativa e contínua, variando de $-mc^2$ até $-\infty$. No entanto, a "segunda quantização Diraciana" mostrava que um elétron em um estado Bohriano excitado perde energia espontaneamente por emissão de um fóton ($h\nu$), caindo, como consequência, no estado fundamental.

Tendo em vista o resultado acima, o físico sueco Oskar Benjamin Klein (1894-1977), em 1929 (*Zeitschrift für Physik* 53, p. 157) apresentou a seguinte questão, conhecida como **paradoxo de Klein**:

Um elétron no estado fundamental pode emitir um fóton com energia ($h\nu$) maior que o dobro de sua energia de repouso ($2mc^2$), ou seja, $h\nu > 2mc^2$ e cair para um estado de energia negativa como havia sido proposto pela equação de Dirac. Uma vez nesse estado, o elétron continuaria emitindo fótons já que não havia limite mínimo de energia negativa, pois essa se estende até $-\infty$. Isso, contudo, não é observado experimentalmente.

A solução para esse "paradoxo" foi apresentada pelo próprio Dirac, nos artigos de 1929 e 1930, citados anteriormente, nos quais afirmou que, em condições normais, os estados de energia negativa estão todos ocupados por elétrons, o "mar de Dirac", já referido. Assim, as transições catastróficas previstas por Klein eram proibidas pelo Princípio da Exclusão de Pauli, de 1925 (*Zeitschrift für Physik* 31, p. 765). Ainda nesses trabalhos, Dirac afirmou que um desses elétrons pode absorver um fóton com energia ($h\nu$) maior do que o dobro de sua massa de repouso $-mc^2$ até $-\infty$ e tornar-se um estado de energia positiva; como resultado, um "buraco" ou "anti-elétron" é criado nesse "mar", que corresponde a um próton, conforme já destacamos anteriormente. Estava, desse modo, dada uma explicação do **paradoxo de Klein**.

[Página Inicial](#)

[ANTERIOR](#)

[SEGUINTE](#)